

Optymalizacja prętowych powłok walcowych za pomocą metody analogii potencjału energetycznego

Kajetan Sadowski

e-mail: kajetan.sadowski@pwr.edu.pl

*Zakład konstrukcji i budownictwa ogólnego,
Wydział Architektury Politechniki Wrocławskiej*

Streszczenie: Przestrzenne konstrukcje prętowe nazywane często strukturami przestrzennymi znalazły szerokie zastosowanie w świecie, szczególnie zaś w przekryciach obiektów o dużych rozpiętościach. Projektowanie obiektów w których znajdują zastosowanie prętowe struktury przestrzenne o skomplikowanej geometrii jej często poprzedzane licznymi badaniami teoretycznymi i modelowymi. Jednym z etapów projektowania, istotnym z punktu widzenia optymalizacji geometrycznej struktury jest wybór odpowiedniej metody wyznaczania jej morfologii. Opisuując zjawiska zachodzące w naturze oraz sposób ich adaptacji do procesu projektowania architektoniczno-konstrukcyjnego autor przedstawia wyniki zastosowania metody analogii potencjałów energetycznych. Inspirację opracowania tej metody stanowi prawo Coulomba - przyjmując, że węzły dowolnej siatki przestrzennej są ładunkami elektrycznymi o ściśle określonych wartościach można otrzymać układ geometryczny w którym wszystkie elementy wzajemnie na siebie oddziałują. Ładunki przyjmą pozycje w przestrzeni dla których suma wzajemnych oddziaływań między nimi będzie najmniejsza. Będzie to układ najkorzystniejszy energetycznie.

W niniejszej pracy przedstawiono rezultaty optymalizacji wykonanych z pomocą modeli i symulacji cyfrowych opracowanych przez autora, poddanych następnie uproszczonym analizom statycznym. Wyniki pokazano za pomocą zaproponowanych przez autora wskaźników efektywności.

Słowa kluczowe: Przestrzenne konstrukcje prętowe, optymalizacja, powłoki walcowe

1. Wstęp

Zagadnienie poszukiwania równomiernego rozkładu w przestrzeni naładowanych potencjałem elektrycznym cząsteczek traktowanych, jako węzły struktury krystalicznej pojawia się w literaturze od lat '70 ubiegłego wieku. Założenie, że ich rozkład na powierzchni sfery, charakteryzujący się osiągnięciem minimum sumy energii potencjalnej pomiędzy nimi, nosi znamiona układu symetrycznego potwierdzali m.in.: Knop & Smith (1977), Ashby & Brittin (1986), Wille (1986), Frickel i Bronck (1987), Weinrach, Carter, Bennet & McDowell (1990), Erber & Hockey (1991), Edmundson (1992, 1993). Stwierdzali oni w optymalizowanych układach występowanie różnych grupy przestrzennych symetrii [1], [3]. Szczególnie J. R. Edmundson już w 1992 r. [2] przedstawił uzyskane za pomocą napisanego w Fortranie oprogramowania i obliczone na komputerze IBM 286 wyniki optymalizacji układów złożonych od 4 do 100 ładunków podając obliczoną dla niego minimalną energię potencjalną.

2. Algorytm obliczeniowy

Ładunki elektryczne zachowują się zgodnie z prawem Coulomba wyrażoną poniższym wzorem:

$$F^1 = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

gdzie k jest tzw. współczynnikiem proporcjonalności wyrażanym w układzie SI przez:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

gdzie ϵ oznacza przenikalność elektryczną ośrodka. Na potrzeby prezentowanych badań przyjmowano ją jako stałą, niezależną od innych warunków.

Przyjmijmy, że węzłem dowolnej siatki W_1 przestrzennej jest ładunek elektryczny o wartości q zlokalizowany w przestrzeni trójwymiarowej i opisany współrzędnymi $px1, py1, pz1$. W przypadku, gdy w jego sąsiedztwie znajdzie się inny węzeł W_2 będą one na siebie oddziaływać siłą o wartości F^1 . Ponieważ przyjmujemy, że wartości ładunków w obu węzłach są sobie równe, a wartość k także jest zawsze stała, to możemy zdefiniować parametr wartości ładunku Q^1 , który będzie wynosił:

$$Q^1 = q_1^1 \times q_2^1$$

a siła oddziaływania F^1 będzie miała wtedy wartość:

$$F^1 = \frac{Q^1}{d}$$

gdzie $d = r^2$.

Uwzględniając położenie węzłów W_1 i W_2 w przestrzeni oraz zakładając, że $Q^1 = 1$, siła oddziaływania pomiędzy nimi będzie równa:

$$F^{1_{1-2}} = 1 / \sqrt{(p_{x_2} - p_{x_1})^2 + (p_{y_2} - p_{y_1})^2 + (p_{z_2} - p_{z_1})^2}$$

gdzie px_i, py_i, pz_i oznaczają współrzędne x, y, z węzła W_i .

Siła F^1 będzie wywoływać przesunięcie każdego z węzłów o odległość L^1 . W celu uproszczenia obliczeń i przy założeniu, że siła nie wywołuje stałej prędkości przyjęto założenie, że:

$$L^1 = F^1$$

W układzie złożonym z określonej liczby n węzłów W_i gdzie i oddziaływania, przy $i \in \langle 1; n \rangle$, będą zachodzić wzajemnie pomiędzy wszystkimi węzłami. Oznacza to, że siła F_{wm}^1 oddziaływująca na węzeł W_m będzie sumą wszystkich sił odpychających, jakie zachodzą pomiędzy tym węzłem, a wszystkimi pozostałymi:

$$F_{\mathcal{W}}^1 = \sum_{i \rightarrow n, i \neq m} F_{W(m-i)}^1$$

a przesunięcie L_{wm}^1 tego węzła będzie się równać:

$$L_{\mathcal{W}}^1 = F_{\mathcal{W}}^1$$

Przesunięcia wszystkich n węzłów można opisać wzorem:

$$L_{\mathcal{W}}^1 = \sum_{i \rightarrow n, i \neq m} L_{W(m-i)}^1 \quad \text{gdzie } m \in \langle 1; n \rangle$$

W ten sposób uzyskujemy w trakcie jednej iteracji określone przesunięcia wszystkich węzłów. Kolejna iteracja powoduje kolejne przesunięcie wszystkich węzłów itd. Zupełnie swobodne węzły będą się oddalać od siebie

w nieskończoność, aż siła F' oddziaływania pomiędzy nimi spadnie do zera. W przypadku jednak, gdy uniemożliwimy im wydostanie się pewnej określonej przestrzeni siły oddziaływania pomiędzy nimi będą cały czas się pojawiać. Jednakże cały układ będzie dążył do stanu w którym jego energia potencjalna będzie najmniejsza, a przesunięcia będą dążyć do zera. W układzie zamkniętym będzie to oznaczać osiągnięcie lokalnego minimum. Stan w którym układ osiągnie minimum energii potencjalnej będzie stanem równowagi, który można opisać wzorem:

$$\vec{F} \longrightarrow \vec{F}_{\min} \Leftrightarrow \sum_m F_m^1 \longrightarrow 0 \text{ gdzie } m \in \langle 1; n \rangle$$

3. Statyczne kryteria analizy porównawczej

Otrzymane za pomocą metody analogii potencjałów energetycznych modele badawcze zostały poddane uproszczonym analizom statycznym, których celem było sprawdzenie ich właściwości konstrukcyjnych. Każdorazowo zestawiono wyniki wartości naprężeń normalnych w wybranych charakterystycznych elementach struktury. Dodatkowo, aby dać pełen obraz wyťaženia wszystkich prętów autor wprowadził propozycję zastosowania wskaźników:

Zaproponowano wskaźnik:

Wskaźnik Sumy Naprężeń Ekstremalnych (WSNE)

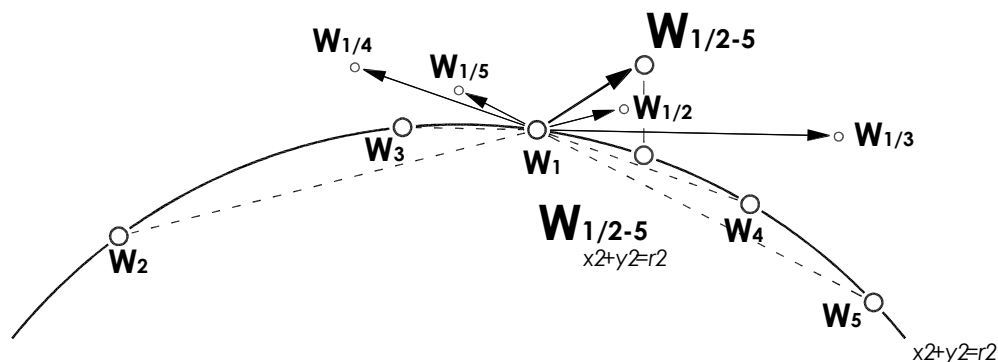
Stanowi on sumę wartości bezwzględnych naprężeń normalnych maksymalnych i minimalnych występujących we wszystkich prętach struktury i jest stosowany w modelach o węzłach sztywnych.

$$WSNE = \sum_{i=1}^n (|S \max_i| + |S \min_i|)$$

gdzie $S \max_i$ oznacza wartość naprężeń normalnych maksymalnych w pręcie, $S \min_i$ oznacza wartość naprężeń normalnych minimalnych w pręcie a n - ilość prętów w strukturze.

4. Wyniki symulacji dla płaskich struktur dwuwarstwowych

Powierzchnia walcowa należy do podstawowych form wykorzystywanych podczas projektowania przestrzennych struktur prętowych. Oddziałujące na siebie węzły będą mogły się poruszać jedynie po powierzchni walcowej wyrażonej wzorem $x^2 + y^2 = r^2$ z zastrzeżeniem, że współrzędna z nie może być mniejsza niż zadeklarowana wartość, tak aby ograniczyć ruch jedynie do preferowanego wycinka okręgu (rys. 1).



Ryc. 1. Węzeł W_1 i oddziałujące na niego węzły $W_2 - W_5$.

Określenie lokalizacji wypadkowego węzła $W_{1/2-5}$ na powierzchni wycinka łuku.

Poniżej zaprezentowane są wyniki symulacji i uproszczonej analizy statycznej dla wybranych struktur o kształcie powłoki walcowej o liczbie modułów 13×13 , wymiarach w rzucie $10 \text{ m} \times 9,32 \text{ m}$, strzałce wysokości 2 m . W celu umożliwienia wykonania analizy porównawczej na podstawie otrzymanych wyników przyjęto, że wszystkie modele badawcze są wykonane z elementów tego samego rodzaju (pręty stalowe o przekroju kwadratowym $50 \times 50 \times 4 \text{ mm}$ łączone w sztywnych węzłach) oraz, że są poddane takiemu samemu obciążeniu jednostkowemu w każdym węźle struktury o wartości 1 kN .

Przyjęto zmienną wartość ładunków Q' równą $0, 100, 200, 300, 400$ jednostek. Dodatkowo zablokowano możliwość przesuwania się węzłów brzegowych.

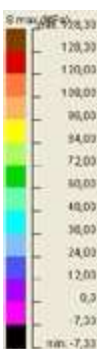
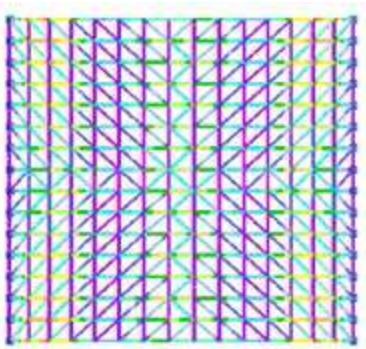
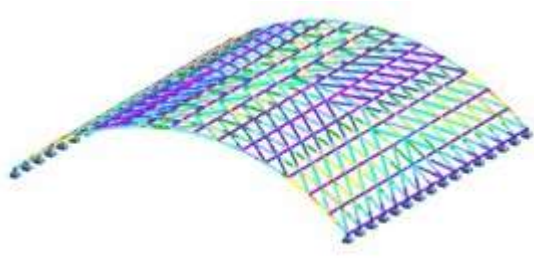
	Maksymalne naprężenia normalne w strefie podporowej* [MPa]	Maksymalne naprężenia normalne w środku rozpiętości* [MPa]
	WARIANT 1	$Q' = 0 \text{ j.}$
		
Skala	Rzut	Perspektywa
	126,25	83,36
Wskaźnik Sumy Naprężeń Ekstremalnych WSNE		73 757 MPa

Tabela 1: Wynik optymalizacji dla siły $Q' = 0 \text{ j.}$

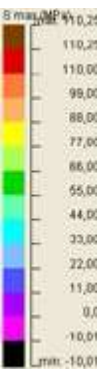
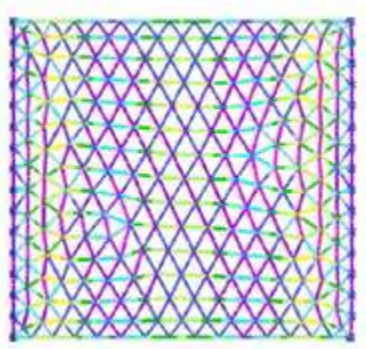
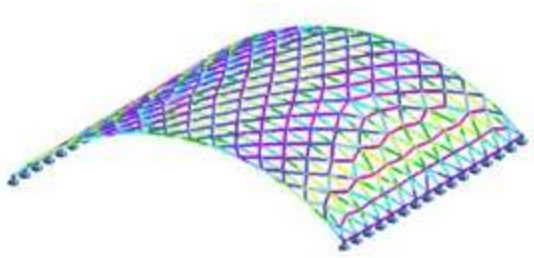
	WARIANT 2	$Q' = 100 \text{ j.}$
		
Skala	Rzut	Perspektywa
	95,89	76,38
Wskaźnik Sumy Naprężeń Ekstremalnych WSNE		66 289 MPa

Tabela 2: Wynik optymalizacji dla siły $Q^1 = 100$ j.

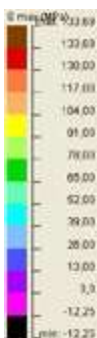
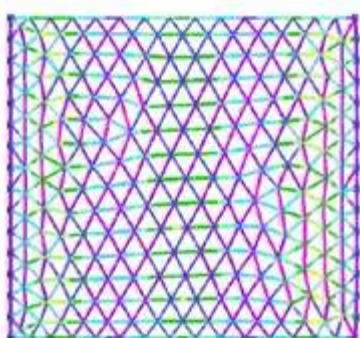
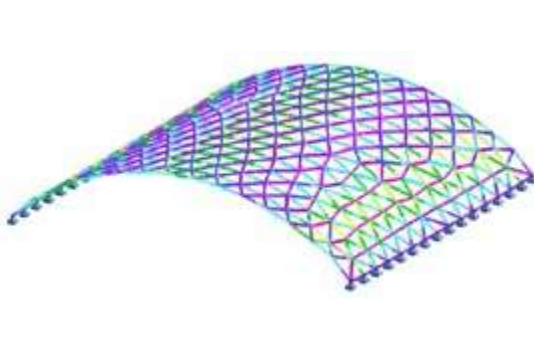
WARIANT 3		$Q^1 = 200$ j.
 Skala	 Rzut	 Perspektywa
	117,08	77,92
Wskaźnik Sumy Naprężeń Ekstremalnych WSNE		68 493 MPa

Tabela 2: Wynik optymalizacji dla siły $Q^1 = 200$ j.

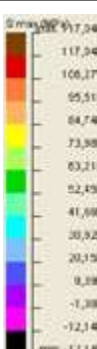
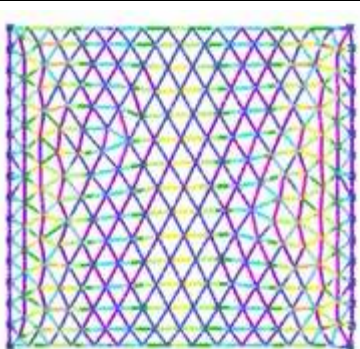
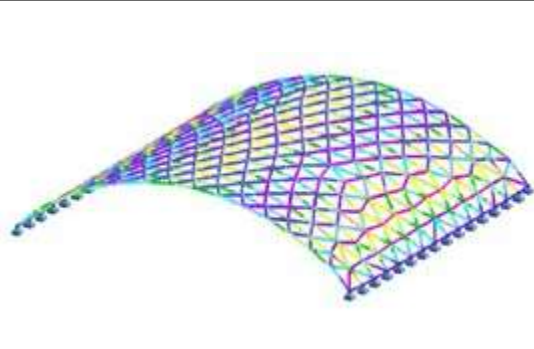
WARIANT 4		$Q^1 = 240$ j.
 Skala	 Rzut	 Perspektywa
	117,04	77,70
Wskaźnik Sumy Naprężeń Ekstremalnych WSNE		68 365 MPa

Tabela 2: Wynik optymalizacji dla siły $Q^1 = 240$ j.

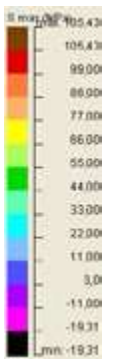
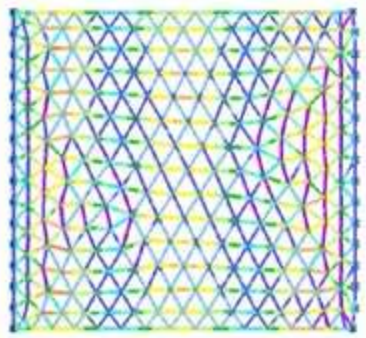
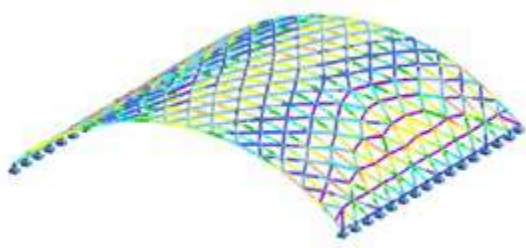
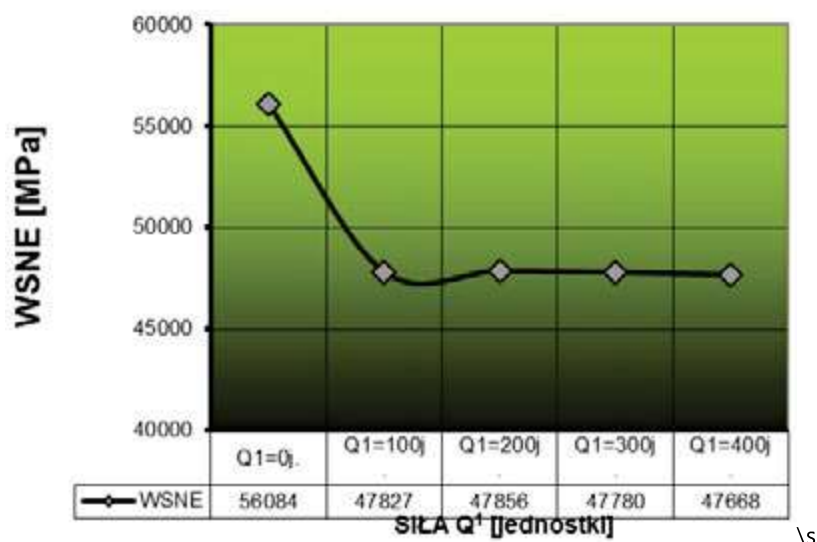
WARIANT 5		$Q^1 = 300$ j.
		
Skala	Rzut	Perspektywa
	100,68	77,81
Wskaźnik Sumy Naprężeń Ekstremalnych WSNE		66 722 MPa

Tabela 2: Wynik optymalizacji dla siły $Q^1 = 300$ j.

5. Podsumowanie

Poniżej przedstawiono wykres ujmujący ogólne tendencje właściwości badanych modeli optymalizowanych metodą analogii potencjałów energetycznych. Na osi odciętych zawarto przyjęte wartości zmiennych optymalizacyjnych, a rzędnych uzyskane wartości współczynnika WSNE.



Ryc. 2. Wartości wskaźnika WSNE dla struktury *Barrel_SPRT_all_FRC_all_BLOK_y* w zależności od przyjętych wartości zmiennych decyzyjnych. Liczba modułów: 15

Wyniki analiz optymalizacyjnych dla powyżej zaprezentowanych typów konstrukcji pozwalają stwierdzić, że *metoda analogii potencjałów energetycznych* przypadków przynosi zwiększenie efektywności konstrukcyjnej badanych struktur prętowych pod kątem wartości naprężeń normalnych w jej elementach opisanych wskaźnikami WSNE.

Analizy statyczne wykazały niezależną od stopnia podziału modelu podobną tendencję w kształtowaniu się wskaźnika WSNE. Dla badanej grupy ulegał on znacznej redukcji przy zastosowaniu metody optymalizacyjnej, jednak w obrębie samej korekty parametru Q^1 zmiany były nieznaczne i nie wykazywały wyraźnej tendencji kształtując się na podobnym poziomie. Procentową wartość minimalnego wskaźnika WSNE w stosunku do wskaźnika WSNE dla modelu wyjściowego osiągnięto na poziomie 85%.

6. Piśmiennictwo

- [1] Berezin A.A., 1985, An unexpected result in classical electrostatics. *Nature*, 315/1985, 104
- [2] Edmundson J.R., 1992, The distribution of point charges on the surface of a sphere. *Acta Cryst*, A48/1992, 60-69
- [3] Nurmela K.J., 1997, Minimum-Energy Point Charge Configuration on a Circular Disk. University of Technology, Digital Systems Laboratory, Series A: Research Reports nr 43, Helsinki, 1997.
- [4] Sadowski K., 2004, Electric charges behaviour analogy applied to structural optimization of flat and barrel vaulted grids. *X Lightweight structures in civil engineering. Local seminar of IASS Polish Chapter*, Micro-Publisher 'Jan Obrębski' Wydawnictwo Naukowe, 2004, 217-219.

Optimization of barrel vault surfaces using energetic potential method

Abstract: Spatial structures are one of the most popular structural systems used to cover large spaces. Arrangement of the bars and nodes has a big influence on the distribution of forces inside the structure. Author was developing the method of dividing a surface which was called the energetic potential method. It is based on a natural process we know as the Coulomb Law. Using it we can create a self-optimizing structure where all of its nodes, mutually repulsing, are finally located in a similar distance to one another. Thanks to special computer program written by Author it was possible to generate a lot of structures with unique topology and after that could do a static analysis of them. After those it was found that some structures have a better ratio than popular structures so Author suppose that the method can have practical application in future [4].

Keywords: Space structures, optimization, barrel vaults