

ZASTOSOWANIE RÓWNANIA HILLA DO BADANIA STANÓW PRACY SILNIKA INDUKCYJNEGO

Feliks Mirkowski

Wydział Inżynierii Produkcji, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. W pracy dokonano historycznego przeglądu zagadnień związanych z wykorzystaniem równań stosowanych w mechanice nieba, które aplikują się do analizy działania przetworników elektromagnetycznych, ze szczególnym uwzględnieniem stanów rezonansowych. Stany te implikują zarówno zjawiska korzystne, jak i niekorzystne z punktu widzenia działania układu napędowego. Wszystkie istotne odkrycia dokonane w dziedzinie fizyki dotyczyły drgań. Równanie Hilla, służące do określenia stabilności ruchu Księżyca wykorzystuje się do badania drgań układów mechanicznych. W obu przypadkach mamy do czynienia z ruchami quasi-periodycznymi.

Słowa kluczowe: drgania, rezonans, układ napędowy, silnik indukcyjny

WSTĘP

Równanie:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (a - 2q \cos 2x)y = 0,$$

gdzie: a i q to liczby rzeczywiste [Magnus 1966] nosi nazwę równania Mathieu, ku czci francuskiego matematyka i astronoma. Równanie to wyprowadził Mathieu w „Memuarze o drgającym ruchu membran eliptycznej formy”, rozwiązując metodą rozdziału zmiennych dwuwymiarowe równanie ruchu, zapisane we współrzędnych eliptycznych.

$$x_p + \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} x_q = b_p, (p = 1, 2, \dots)$$

Okresowe (z okresem 2π) rozwiązania tego równania nazywają się funkcjami Mathieu. Systematyczne ich badanie rozpoczęło się wraz z opublikowaniem przez E. Heine monografii o funkcjach kulistych [Mc Kean i Trubowitz 1975].

W 1877 roku amerykański astronom i matematyk George Wiliam Hill (1838–1914) opublikował memuar o części ruchu księżycowego perygeum, która jest funkcją średnich ruchów Słońca i Księżyca. W pracy tej, która odegrała ważną rolę w historii matematyki (w niej w szczególności badano w ślad za Fourierem układy nieskończonej liczb-

by równań liniowych z nieskończoną liczbą niewiadomych i nieskończone wyznaczniki) oraz mechanice ciał niebieskich.

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \left(\Theta_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \Theta_{1s} \sin 2\nu\tau + 2 \sum \Theta_{1c} \cos 2\nu\tau \right) x = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + A(x)y = 0$$

Już na początku XIX wieku metoda „współczynników nieoznaczonych” (polegająca na tym, że o nieznanej funkcji zakłada się, że jest rozwijalna w szereg:

$$\sum c_n \varphi_n, \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = b_i, (i=1,2,\dots)$$

gdzie: φ_n i c_n są znanymi funkcjami [Hill's operator... 1976]. Otrzymuje się ją obliczając współczynniki c_n . Procedura ta prowadzi do otrzymania „układów liniowych z nieskończenie wieloma niewiadomymi”.

Fourier, napotykając taki układ „rozwiązuje” go jeszcze jak matematyk osiemnastowieczny: odrzuca wszystkie wyrazy ze wskaźnikiem i lub j przekraczającym n , rozwiązuje explicite otrzymany układ skończony za pomocą wzorów Cramera i „przechodzi do granicy”, przyjmując, że $n \rightarrow +\infty$ w rozwiązaniu! Dopiero Hilbert wykazuje, że rozwiązanie równania całkowego [Marczenko i Ostrowskij 1975]:

$$u(x) + \int_a^b K(x,y)u(y)dy = f(x)$$

jest równoważne układowi nieskończenie wielu równań liniowych. Hill otrzymuje równanie:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + (\Theta_0 + \Theta_1 \cos 2t + \Theta_2 \cos 4t + \dots)w = 0$$

Θ – parametry znane [Goldberg 1979].

To uogólnione równanie Mathieu nazwano równaniem Hilla. Równanie takiego typu, gdzie $A(x)$ to funkcja parzysta z okresem π jest uogólnioną postacią równania Hilla. W tym przypadku przy rozwiązywaniu równania stosujemy metodę Whittakera. Zakładając pierwsze przybliżenie na x w postaci:

$$x = e^{i\mu\tau} \sin(n\tau - \sigma) \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

otrzymamy zależności

$$2\mu n = \Theta_{nc} \sin 2\sigma - \Theta_{ns} \cos 2\sigma$$

$$\Theta_0 = n^2 - \mu^2 + \Theta_{ns} \sin 2\sigma + \Theta_{nc} \cos 2\sigma$$

Eliminując parametr σ , otrzymamy [Date and Tanaka]

$$\mu^2 = -(\Theta_0 + n^2) + \sqrt{4n^2\Theta_0 + \Theta_n^2}$$

$$\Theta_n^2 = \Theta_{ns}^2 + \Theta_{nc}^2$$

Istnieją dwie różne wartości σ . Oznaczamy je σ_1 i σ_2 i otrzymujemy rozwiązanie ogólne pierwszego przybliżenia:

$$x = c_1 e^{i\mu\tau} \sin(n\tau - \sigma_1) + c_2 e^{-i\mu\tau} \sin(n\tau - \sigma_2)$$

Jeżeli do układu liniowego doprowadzone jest wymuszenie okresowe, to oscylacyjna odpowiedź układu jest superpozycją dwóch składowych: składowej nieustalonej i składowej ustalonej. Pierwsza składowa odpowiada drganiom swobodnym układu, a druga drganiom wymuszonym wywołanym przez wymuszenie zewnętrzne. Jeżeli jest zachowana liniowość układu, drgania wymuszone są wyłącznie określone przez układ i wymuszenie zewnętrzne i zupełnie nie zależą od warunków początkowych.

W układach nieliniowych sytuacja jest inna; w tym przypadku nie obowiązuje zasada superpozycji. W układzie nieliniowym, oprócz drgań o częstotliwości równej częstotliwości wymuszenia zewnętrznego, może pojawić się wiele drgań okresowych o innych częstotliwościach [Сманкевич 1970].

WARUNEK STABILNOŚCI DRGAŃ OKRESOWYCH

Równanie różniczkowe drugiego rzędu, w którym funkcja $(dv/d\tau)$ ogólnie jest nieliniowa, a wyraz $e(\tau)$ przedstawia okresowe wymuszenie zewnętrzne. Składowa ustalona rozwiązania równania jest harmoniczną albo podharmoniczną wymuszenia, nawet jeżeli w rozwiązaniu dominują wyższe harmoniczne. Rozwiązanie $v(\tau)$ równania jest jednoznacznie określone przez warunki początkowe $v(0)$ i $(dv/d\tau)_{\tau=0}$.

Cechą charakterystyczną układów nieliniowych jest to, że w tym samym układzie mogą występować różne rodzaje drgań okresowych, zależnie od warunków początkowych. Warunek stabilności drgań okresowych jest następujący:

$$Re(-\delta \pm \mu) < 0$$

gdzie 2σ jest wyrazem stałym szeregu $F(\tau)$, a μ jest wykładnikiem charakterystycznym rozwiązania. Jeżeli μ jest wielkością urojoną, to warunek ten upraszcza się do $\sigma > 0$. Jeżeli μ jest rzeczywiste, to warunek poprzedni jest równoważny dwóm warunkom: [Hochstadt 1965]:

$$\sigma > 0 \text{ oraz } \sigma^2 > \mu^2$$

Poincare, twórca jakościowej teorii równań różniczkowych, badał astronomiczny problem ruchu trzech ciał. W swojej monografii „Nowe metody w mechanice nieba” badał periodyczne rozwiązania równań. Tym samym w obszar jakościowej teorii równań różniczkowych zostały włączone całe kierunki, które w tym czasie zostały rozwinięte w astronomii teoretycznej (np. prace Hilla w zakresie teorii ruchu Księżyca i np. badania Gastona Floqueta o liniowych równaniach różniczkowych z periodycznymi współczynnikami).

Dla rozwinięcia aparatu starej teorii kwantowej, a w szczególności teorii zaburzeń, źródła aparatu matematycznego mechaniki macierzowej można prześledzić w badaniach orbit planet i ich satelitów. Ironią losu jest, że mechanika macierzowa, która pojawiła się na skutek katerycznej odmowy Heisenberga używania pojęcia orbity, musiała powrócić do matematyki ruchu orbitalnego [Hochstadt 1978]. Z równania macierzowego [Hochstadt 1976]:

$$\begin{aligned} |H - \lambda I| &= 0 \\ HU &= UW_i \\ \sum (H_{mk} - W\delta_{mk})U_{kn} &= 0 \end{aligned}$$

O prawdzie tego stwierdzenia świadczy nazwa równania charakterystycznego. Astronomowie nazywają równanie tego typu sekularnym (*saeculum* – pokolenie, *saeculum civile* – okres 100-letni), ponieważ pozwalało ono określić sekularne (długoperiodyczne) zaburzenie orbit planet, czyli odchyłki ekscentricitetów i pochyłeń od ich wartości średnich.

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + f\left(v, \frac{dv}{d\tau}\right) = e(t)$$

Lagrange i Laplace badali równanie sekularne szóstego stopnia, ponieważ wówczas znano tylko sześć planet. Systematyczne badanie nieskończonego układu równań było zapoczątkowane publikacją Hilla: „On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon” (Cambridge, Mass., Wilson, 1877; Acta Mathematica, 1886, 8, 1–36). Jednocześnie z procesem powstania mechaniki macierzowej postępował proces, dla którego punktem wyjścia była nie mechanika cząsteczek, a problem istoty światła. Była to tajemnica. Hamilton zaproponował dać optyce jako formalnej nauce takie samo piękno, moc i harmonię, które Lagrange dał mechanice. Przy pomocy swojej „funkcji charakterystycznej” udowodnił, że ruch określonej masy w polu siłowym podlega tym samym prawom, co rozprzestrzenianie się promienia świetlnego. Hamiltonowski formalizm zastosowany do mechaniki wyniknął z jego badań w dziedzinie optyki. Z wariacyjnej zasady Hamiltona [Hochstadt 1966]

$$\delta \int L dt = 0$$

łatwo otrzymać (dla stałej energii) zasadę najmniejszego działania Pierre Louisa Moreau de Maupertois, najstarszą zasadę dynamiki:

$$\delta \int 2T dt = \delta \int [2m(E - U)]^{1/2} ds = 0$$

Porównując to równanie z zasadą najmniejszego czasu Fermiego, leżącą u podstaw geometrycznej optyki, a mianowicie:

$$\delta \int \frac{n}{c} ds = 0$$

widzimy, że wyrażenie $C[2m(E - U)]^{-1/2}$ gra w mechanice taką samą rolę, co w optyce szybkość fazowa $u = c/n$, symbolicznie mamy [Hochstadt 1981]

$$u = \frac{c}{n} \leftrightarrow C[2m(E - U)]^{-1/2}$$

Ten stosunek można nazwać „optyczno-mechaniczną analogią Hamiltona”. Analogię możemy przedłużyć. Funkcja działania [Hearn 1973]

$$S = \int_{t_0}^t L dt$$

określa „powierzchnię działania” $S(x, y, z, t) = \text{const}$, na której

$$\rho = \nabla S, i, \frac{\partial S}{\partial t} = L - \rho v + -E$$

Dla płaskiej fali monochromatycznej wektor falowy k i częstotliwość $\omega = 2\pi\nu$ związane są z fazą $\varphi = -\omega t + kr$ równaniem:

$$k = \nabla \varphi, i, \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega$$

Dlatego powierzchnia stałego działania układu cząstek rozprzestrzenia się tak, jak powierzchnia stałej fazy w optyce, przy czym wektor falowy odpowiada impulsowi, a częstotliwość – energii cząstek.

Hill potrzebował rozwiązać równanie

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \vartheta w = 0, \text{ gdzie } \vartheta = \sum \vartheta_k \exp(jkt)$$

Ponieważ całka różniczkowanego równania ma postać

$$w = \sum b_n \exp[j(n+c)t],$$

gdzie: b_n i c stałe, Hill otrzymał nieskończony układ równań [Łumpow i in. 1983]

$$\sum \vartheta_{n-k} b_k - (n-c)^2 b_n = 0, \text{ przy } n = -\infty \dots +\infty$$

W pracy o podstawach teorii równań całkowych Hilbert rozpatrywał ograniczone formy kwadratowe od nieskończonej liczby zmiennych, określwszy je w następujący sposób: Forma kwadratowa

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} x_k x_l$$

jest ograniczona, jeżeli istnieje taka liczba dodatnia C , że dla wypełnionego warunku:

$$\sum |x_k|^2 \leq 1$$

Dla dowolnego naboru zmiennych $x_1, x_2, \dots$ otrzymujemy:

$$\left| \sum_{k,l=1}^n a_{kl} x_k x_l \right| \leq C$$

dla dowolnego n [Henon. 1969].

Jeżeli podobne formy poddać ortogonalnemu przekształceniu do osi głównych, to okazuje się, że oprócz sumy członów w kwadracie pojawiają się całki określone; czyli pośród wartości własnych istnieją wartości dyskretne (dyskretne lub spectrum dokładne), jak i wartości ciągłe (ciągłe spectrum).

Okazało się możliwe pominięcie granicznego Hilbertowskiego przejścia od algebry do analizy, które jest związane ze skomplikowanymi procedurami badania zbieżności. Zgodnie z Hellingerem, dla podobnych układów stosujemy biliniową formę Hermite'a:

$$\sum H_{mn} x_m x_n^*$$

co wyraża:

$$\sum W_n y_n y_n^* + \int W(\varphi) y(\varphi) y^*(\varphi) d\varphi,$$

gdzie dyskretne liczby rzeczywiste W_n obrazują dokładne spectrum wartości własnych, a funkcje rzeczywiste $W(\varphi)$ od ciągłego parametru φ – ciągłe spectrum. Rezultat ten jest ważny i dla układów nieograniczonych.

W teorii nieliniowych rezonansów równanie Hilla przybiera postać [Henon and Guyot 1970]:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \left(\Theta_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \Theta_{\nu} \cos 2\nu\tau \right) x = 0$$

$\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \dots$ parametry ustalone.

Rozwiązanie niestabilne z zastosowaniem metody Whittakera (zmiany parametru)

Zgodnie z teorią Floqueta rozwiązanie szczególne równania ma postać:

$$x = e^{\mu\tau} \phi(\tau)$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + 2\mu \frac{d\phi}{d\tau} + \left(\Theta_0 + \mu^2 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \Theta_{\nu} \cos 2\nu\tau \right) \phi = 0$$

Można przyjąć w pierwszym przybliżeniu następującą postać funkcji okresowej $\phi(\tau)$ w n -tym obszarze niestabilnym:

$$\phi(\tau) = \sin(n\tau - \delta) \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots, \delta$$

W bardziej ogólnym przypadku równanie przyjmie postać

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(\Theta_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \Theta_{\nu s} \sin 2\nu\tau + 2 \sum \Theta_{\nu c} \cos 2\nu\tau \right) x = 0$$

którą uważamy za postać uogólnioną równania Hilla [Baker i Gollub 1998]. Zakładamy pierwsze przybliżenie na x w postaci:

$$x = c_1 e^{\mu\tau} \sin(n\tau - \delta_1) + c_2 e^{-\mu\tau} \sin(n\tau - \delta_2)$$

Równanie Hilla dla silnika indukcyjnego zostało pierwotnie sformułowane przez Breretona, a jego rozwiązanie numeryczne przedstawiono w pracy de Kocka. Zakłada się tam, że silnik w stanie dynamicznym może być opisany jedynym równaniem ruchu wirnika, przy arbitralnie założonym wymuszeniu elektromagnetycznym. Równanie to może być sprowadzone do równania Hilla parametrycznych drgań skrętnych z tłumieniem.

Silnik elektryczny jest generatorem widma drgań momentu obrotowego. Moment indukcyjny silnika, wyrażony w sposób klasyczny, uwzględniający wszelkie harmoniczne stojana ν i wirnika ρ , wynosi:

$$M = \sum_{\rho} M_{\rho} \sim \sum \sum \sin \left([\rho\omega \pm (\pm\omega - \nu\omega) \mp \omega] t - \varphi_{\rho} \right)$$

Równanie to daje wyobrażenie o wielości wymuszeń harmonicznym, nie oddaje jednak w pełni stanów przejściowych, o znacznie bogatszym spektrum częstotliwości. Dla symulacji widma drgań skrętnych momentu, można posłużyć się szeregiem Fouriera w formie wyrażającej początkowe fazy harmonicznym [Łahday i Lipszyc 1988, Zadrozny 1999]:

$$x(t) = A_0 + \sum A_n \cos(n\omega + \varphi_n)$$

Rozważmy równanie Hilla

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 [1 - f(t)]x = 0,$$

gdzie $f(t)$ jest okresową funkcją czasu. Przypuśćmy, że na skutek działania przypadkowych zaburzeń początkowych układ wykonuje drgania swobodne z częstością ω_0 . Wówczas czynnik zewnętrzny zmieniając parametr układu może w pewnych warunkach doprowadzać okresowo energię do drgającego układu i w tym przypadku amplituda drgań będzie stale wzrastać z czasem – wystąpi tak zwany rezonans parametryczny.

Aby energia dopływała do układu, musi wystąpić odpowiednie dopasowanie częstotliwości zmian parametru do częstości ω_0 . Przyjmijmy, że funkcja $f(t)$ ma okres $T = 2\pi/p$ (ma postać prostokątną), przy czym $\mu < 1$ (μ – głębokość modulacji – amplituda prostokąta). Przyjmując taką postać funkcji $f(t)$, możemy uprościć w sposób zasadniczy obliczenia zachowując jakościowy charakter rozpatrywanego zjawiska. Wahadło w polu z periodycznie zmieniającą się siłą ciężkości (np. Księżyc) opisywane jest równaniem Hilla [Brohszteh 1990]:

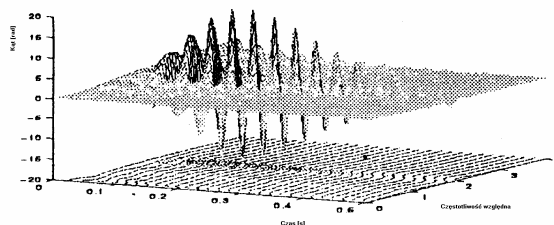
$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\omega^2(t)q, \omega(t+T) = \omega(t).$$

Pomiary drgań zostały opublikowane w pracy Mirkowskiego [2005]. Na krzywych pojawiają się zauważalne szerokie piki, których położenie w przybliżeniu odpowiada rezonansowemu równaniu Hilla. Zamiarem autora jest znalezienie współrzędnych rezonansowych konkretnego silnika indukcyjnego i uogólnienie otrzymanych wyników. Równanie Hilla ma wiele zastosowań (np. odpowiedź głębokiej wody oceanicznej na wymuszenie wielosinusoidalne, tak jak to się odbyło w przypadku huraganu „Katrina”, wprowadza do równania Kuramoto-Suzuki, traktującego o cyklach granicznych w układach z dyssypacją itd.). Zwykle prawa kwantowania mogą być zamienione innymi warunkami, w których nie wspominamy o całych liczbach. Liczby całkowite pojawiają się niejako automatycznie, jako liczby węzłów drgającej struny. Zwykła forma warunków kwantowania związana jest z równaniem Hamiltona-Jakobi.

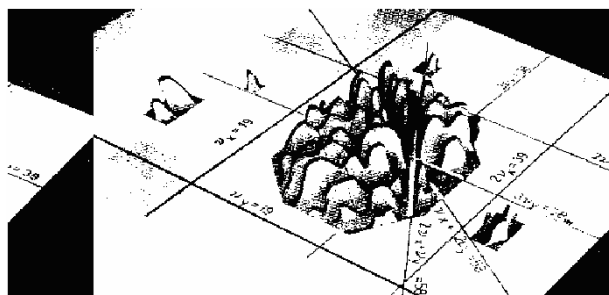
Mirkowski [2005] dążył do otrzymania przebiegów drganiowych obrazujących drgania parametryczne, drgania skrętne, rezonans podharmoniczny, traktując silnik jako obiekt drgań parametrycznych, przejawiających się niekiedy w formie rezonansu. Zjawisko oscylacji części ruchomej, prowadzące do możliwości powstania drgań parametrycznych w strukturach elektro-magneto-mechanicznych znalazły swój wyraz w spektrach drgań badanej maszyny [Mirkowski 2005].

Posługując się równaniem Hilla autor oczekuje, potwierdzenia wartości współrzędnych pojawiania się rezonansów w układzie napędowym pilarki elektrycznej. Wyniki tej pracy pozwolą na uogólnienie metody wyznaczania parametrów rezonansów nieliniowych w układach napędowych innego rodzaju. Rozwiązano równanie Hilla dla funkcji sinusoidalnej $f(t)$: stała czasowa $T_e = 0,1$ s, $\omega_{m0} = 2\pi 30 \text{ s}^{-1} = 188,4 \text{ s}^{-1}$. Rozwiązanie dawało współrzędne rezonansowe.

Ilustracją rozwiązania równania Hilla dla funkcji sinusoidalnej jest rysunek 1. Rysunek 2 obrazuje rezonanse nieliniowe.



Rys. 1. Ilustracja rozwiązania równania Hilla dla funkcji sinusoidalnej
Fig. 1. Illustration of Hill's equation's solution for sinusoidal function



Rys. 2. Rezonanse nieliniowe klatkowego silnika indukcyjnego
Fig. 2. Nonlinear resonances of cage inductive motor

Na przykład częstość drgań funkcji falowej dowolnego układu w stanie o dobrze określonej energii jest równa tejże energii podzielonej przez wielkość fizyczną zwaną stałą Plancka. Dwaj obserwatorzy, których zegarki różnią się w swoich wskazaniach o sekundę obserwują bardzo podobne zachowanie układu, ale jeśli wykonają obserwację dokładnie w chwili, kiedy wskazówki ich zegarków pokazują południe, to zaobserwują różne fazy oscylacji. Ponieważ ich zegarki są nastawione nieco inaczej, w rzeczywistości obserwują oni układ w różnych chwilach. Dlatego jeden z nich może obserwować maksimum, a drugi minimum fali. Różnica fazy jest równa liczbie cykli (lub części cyklu), jakie zachodzą w ciągu jednej sekundy, czyli częstości oscylacji w cyklach na sekundę, a tym samym energii podzielonej przez stałą. Prace związane z teorią drgań mają zasadnicze znaczenie dla zrozumienia istoty przyrody nieożywionej i żywej – dotyczą istoty życia.

W porównaniu z klasyczną dynamiką analityczną, w mechanice macierzowej ograniczono się do rozpatrzenia współrzędnych libracyjnych, podczas gdy „stara” teoria kwantowa dawała pierwszeństwo współrzednym kątowym. Jeżeli w „starej” teorii kwantowej przy próbie uzyskania przekształcenia kanonicznego, sprowadzającego zadanie do ruchu periodycznego prototypem był rotator (jednostajna prędkość kątowa), to w mechanice macierzowej był nim oscylator. Wówczas w sposób „niejawny” uznano, że „wszystko drga”.

Drgania podharmoniczne

Są to drgania, których częstotliwość podstawowa jest częścią równą $1/\nu$ ($\nu = 2, 3, 4, \dots$) częstotliwości wymuszenia.

Rozpatrzmy równanie podstawowe [Osowski 1999]:

$$\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + 2\delta\frac{d\vartheta}{d\tau} + f(\vartheta) = B\cos\nu\tau$$

gdzie:

2δ – stały współczynnik tłumienia,

$f(\vartheta)$ – człon przedstawiający nieliniową siłę restytucyjną.

Okres wymuszenia zewnętrznego jest równy $2\pi/\nu$, drgania podharmoniczne mają okres 2π i mogą być wyrażone przez kombinację liniową $\sin\tau$ i $\cos\tau$.

Unoszenie częstotliwości

W układach występują drgania samowzbudne, gdy nie działa wymuszenie zewnętrzne. Z chwilą doprowadzenia okresowego wymuszenia zewnętrznego, częstotliwość drgań własnych układu wpada w synchronizm z częstotliwością generatora sterującego w pewnym zakresie częstotliwości. To zjawisko unoszenia częstotliwości występuje także wtedy, gdy stosunek dwóch częstotliwości jest bliski liczbie całkowitej (różnej od jedności) lub ułamkowi właściwemu. Przy tym warunku częstotliwość drgań własnych jest unoszona przez częstotliwość będącą całkowitą wielokrotnością bądź podwielokrotnością częstotliwości sterującej. Charakterystyki amplitudowe drgań unoszonych otrzymuje się metodą bilansu harmonicznego; do badania stabilności tych układów jest stosowane równanie Hilla – jako kryterium stabilności. Obszary unoszenia częstotliwości, tzn. obszary, w których pojawiają się różne rodzaje drgań unoszonych, jak i prawie okresowych, są poszukiwane przez zmianę amplitudy i częstotliwości wymuszenia zewnętrznego.

Zjawisko to występuje wówczas, gdy wymuszenie zewnętrzne (sterujące) zostanie doprowadzone do takiego układu, którego drgania swobodne są typu samowzbudnego. Ważnym przypadkiem jest układ opisany równaniem Van der Pola z członem dodatkowym określającym wymuszenie okresowe. Częstotliwość drgań samowzbudnych wpada w synchronizm z częstotliwością wymuszenia zewnętrznego pod warunkiem, że te dwie częstotliwości nie różnią się bardzo od siebie. Jeżeli ich różnica jest dostatecznie duża, to można oczekiwać pojawienia się drgań prawie okresowych; inaczej mówiąc mogą powstać drgania dudnieniowe. Natomiast unoszenie częstotliwości może wystąpić wówczas, gdy stosunek częstotliwości własnej drgań samowzbudnych do częstotliwości wymuszenia równy jest w przybliżeniu liczbie całkowitej (różnej od jedności) lub ułamkowi. Przy tym warunku częstotliwość własna układu jest przekształcana w częstotliwość, która jest całkowitą wielokrotnością lub podwielokrotnością częstotliwości wymuszenia zewnętrznego. Takie unoszenie nazywamy odpowiednio unoszeniem nadharmonicznym i podharmonicznym. W przeciwieństwie do tych typów unoszenia, zjawisko synchronizacji będziemy nazywać unoszeniem harmonicznym [Физика на пороге... 1990].

Turbulencja

Turbulencja jest nagromadzeniem się współzawodniczących rytmów. Kiedy do układu dostarczana jest energia, pojawiają się stopniowo nowe częstości, z których każda nie przystaje do ostatniej, jak gdyby struna skrzypiec odpowiadała na mocniejsze pociągnięcie smyczkiem poprzez wibracje z częstością rezonansowa, aż dźwięk przemieniłby się w niezrozumiałą kakofonię. Tak można zinterpretować wyrastanie z wiru nieciągłości rezonansowej.

PIŚMIENNICTWO

- Baker G., Gollub J., 1998: Wstęp do dynamiki układów chaotycznych. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.
- Брохштѣн В.А., 1990: Как движется лыжа? Москва, НАУКА.
- Date E., Tanaka S. Hill's equation for a finite number of instability intervals. *J. Math. Anal.*
- Сманкевич И. В., 1970: О одном одвотном заданию аналйзы спектральной рѳвнания Хилла. *ДАН*, 192, 1, 34–37.
- Физика на погѳге побых ѳкрытй. Ленинград 1990. Издательство Ленинградского униберситета.
- Goldberg W., 1979: On the determination of a Hill equation from its spectrum. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80, 6, 1111–1112.
- Hearn A.C. 1973: Reduce – 2 Users Manual. VCP – 19, Universitet of UTAH, 90 p.
- Henon M., 1969: Numerica of the reslieted problem. V. Hill's case: periodic orbits and their stability astronom and astrophysic, v. 1., 223–238.
- Henon M., Guyot. M., 1970: Stability of periodic in the restried problem. (Periodic orbits, stability and Resonance). Ed. GEO, Giccaglis, Dardrecht: Reichel, 349–374.
- Hill's operator and hypereliptic function theory in the precense of infinitely many. *Branch Points – Comm. Pure Appl. Math*, 1976, 29, 143–226.
- Hochstadt H., 1965: On the determination of Hill's equation from its spectrum. *Arch. Rat. Anai.*, 19, 353–362.
- Hochstadt H. 1978: A direct and inverse problem for a Hill's equation with double eigenvalues. *J. Math. Ann. Appl.*, 66, 3, 507–513.
- Hochstadt H., 1976: An inverse problem for a Hill's equation. *J. Diff. Eq.*, 20, 1, 53–60.
- Hochstadt H., 1966: On the determination of a Hill's equation from ist spectrum. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 23, 3, 237–238.
- Hochstadt H., 1981: On the explicit solution of a special Hill's equation. *J. Math. Appl.*, 79, 2, 517–520.
- Łumpow W.J. Rostowcew W.A. Fedorow P.N., 1983: Analityczne obliczenia na maszynie cyfrowej i ich zastosowanie w fizyce teoretycznej. *Dubna, OIAU*, 206–213.
- Лабдай Л.Д., Лифшиц В.М., 1988: Гидродинамика. Москва, НАУКА.
- Magnus W., 1966: Hill's Equation – N.Y. Interscience Wiley, Mc Kean H.P. Moerbeke P. Van.
- Marczenko B.A. Ostrowskij I.W., 1975: Charakterystyka spektra operatora Hilla. *Mat. Sb.*, 97, 4, 540–606.
- Mc Kean H.P., Trubowitz C., 1975: The spectrum of Hill's equation. *Invetion math*, 30, 217–274.
- Mirkowski F., 2005: Analiza drgań układu napędowego pilarki elektrycznej. Praca doktorska, SGGW Warszawa.
- Oowski S. 1999: Modelowanie układów dynamicznych z zastosowaniem języka SIMULINK. Warszawa. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.

Zadrozny J., 1999: Badanie dynamiki małych maszyn. Silniki indukcyjne. Rezonans parametryczny. Działalność statutowa Zakładu Małych Maszyn Elektrycznych Inst. Elektrotechniki.

APPLICATION OF HILL'S EQUATION TO INVESTIGATIONS
ON INDUCTIVE MOTOR OPERATIONAL STATES

Summary. There is presented a historical review of problems connected with application of equation used in the sky mechanics, related to analysis on electromagnetic converters, with particular consideration to resonance states. These states implicate both the favourable and unfavourable phenomena from the viewpoint of driving system operation.

Key words: vibrations, resonance, driving system, inductive motor