

К ДИНАМИЧЕСКОМУ РАСЧЕТУ МАШИН

Oleg Lytvynov*, Wojciech Tanaś**

*National Agrarian University of Ukraine, Kyiv

**Akademia Rolnicza w Lublinie

Аннотация. В работе приведены методы составления эквивалентной динамической модели сложных материальных систем комбинированных машин, составлены и решены дифференциальные уравнения движения с учетом полученных экспериментально и аппроксимированных рядами Фурье моментов на рабочих органах, приведены анализ характеристического уравнения и выводы по результатам.

Ключевые слова: машина, привод, система, надежность, угловая скорость, звено, трансмиссия, модель, механизм, масса, комбайн, степень свободы, момент силы, момент инерции

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современного машиностроения, связанное с постоянным ростом рабочих скоростей и быстродействия функциональных систем машин, повышением мощностей приводов и передаваемых нагрузок в их элементах, требует для обеспечения необходимого уровня надежности применения при проектировании машин динамических методов исследования и расчетов.

Повышение с ростом скоростей удельного веса инерционных нагрузок, пропорциональных квадрату скоростей, а также уровня колебаний сил внешних сопротивлений приводит к возникновению в упругих элементах машин колебательных процессов, вносящих в нагрузки весьма значительные динамические добавки. В связи с этим появляется настоятельная необходимость в учете реальных физических свойств материалов звеньев, образующих механизмы, а также таких факторов, как взаимовлияние процессов в приводных двигателях и технологического процесса в рабочей машине.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОБОСНОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В работе поставлена задача провести динамическое исследование механических систем механизмов привода, силовых линий сложных машин типа прицепных комбайнов, например, кукурузо-, кормоуборочных, привод которых

осуществляется от вала отбора мощности трактора через кардан до центрального редуктора комбайна, а затем разветвляется до различных рабочих органов.

Трансмиссия таких комбинированных машин является сложной разветвленной изгибно-крутильной динамической системой с большим числом распределенных и сосредоточенных масс, соединенных элементами, обладающими определенными упруго-инерционными характеристиками. Изучение таких систем связано с большими затруднениями математического характера. Однако практические задачи динамического исследования допускают возможности значительного упрощения эквивалентных моделей сложных машин.

Не искажая основных закономерностей действительных динамических процессов, можно заменить реальный механизм его эквивалентной моделью, составленной из абсолютно жестких дискретных масс и безынерционных упругих соединительных элементов и представить реальную систему с большим числом степеней свободы динамически эквивалентной упрощенной схемой с конечным числом степеней свободы.

Порядок преобразования реальной материальной системы и получение динамических характеристик элементов модели принят следующий. Прежде всего, определяются моменты инерции масс и крутильные податливости всех конструктивных элементов комбайнов, используя расчетно-экспериментальные методы. Податливости определяются в основном расчетным путем. В необходимых случаях учитывалась изгибная податливость валов и опор, которая приводилась к крутильной.

В результате проведенных операций была получена сложная разветвленная схема с большим числом масс различного порядка малости. Пренебрегая массами на порядок меньшими, объединяя те, жесткость связей между которыми на порядок выше других, и приводя систему к главному валу, исходя из условий равенства кинетической и потенциальной энергии, получаем систему с 8-10 степенями свободы, еще достаточно сложную для расчетов.

Дальнейшее уменьшение числа степеней свободы проводилось с учетом сохранения или несущественного отклонения частот низких тонов колебаний, которое, как показывают экспериментальные исследования, являются доминирующими при формировании динамических нагрузок.

При объединении двух соседних масс и понижении числа степеней свободы массы и податливости упрощенной системы определялись из условия:

$$I'_k = I_k + I_{k+1};$$

$$e'_{k-1} = \frac{I_{k+1}}{I_k + I_{k+1}} e_k; \quad e'_k = \frac{I_k}{I_k + I_{k+1}} e_k;$$

В результате проведения перечисленных операций сложную материальную систему комбайнов представилось возможным свести к более простой трехмассовой разветвленной крутильно-колебательной системе с сохранением первых двух форм колебаний.

Эквивалентная схема представлена на рис. 1,

где :

I_1, I_2, I_3 – приведенные моменты инерции двигателя и двух основных масс;

C_1, C_2, C_3 – приведенные жесткости эквивалентных валов;

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_0$ – углы закрутки масс и центра разветвления;

M_1, M_2, M_3 – приведенные моменты внешних сил.

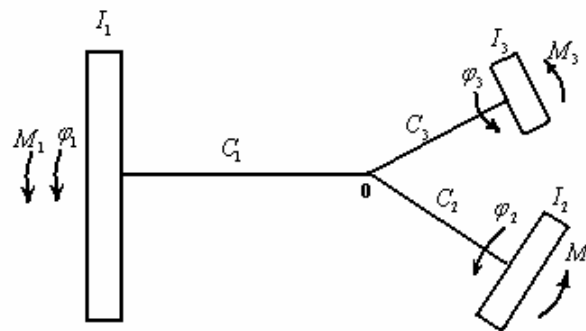


Рис. 1. Эквивалентная схема

Fig. 1. The equivalence schema

Принято, что моменты двигателя изменяются в функции угловой скорости (моментная характеристика снята экспериментально).

$$M_1 = M_n \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_0 - \omega_n}, \quad (1)$$

где:

M_n – приведенный номинальный момент,

ω_0, ω_n – угловые скорости холостого хода и при номинальном моменте.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Формализация модели. Общее решение дифференциальных уравнений движения

Исходная система дифференциальных уравнений, составленная методом Лагранжа во второй форме, имеет вид:

$$\begin{aligned}
I_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1(\varphi_1 - \varphi_0) &= M_1, \\
I_2 \ddot{\varphi}_2 + C_2(\varphi_2 - \varphi_0) &= M_2, \\
I_3 \ddot{\varphi}_3 + C_3(\varphi_3 - \varphi_0) &= M_3.
\end{aligned}
\tag{2}$$

Учитывая, что относительные перемещения масс $\varphi_1 - \varphi_0, \dots$ или деформации связей пропорциональны соответствующим силам упругости $M_{10}, \dots$,

$$(\varphi_1 - \varphi_0)C_1 = M_{10},$$

и выражая угловые перемещения φ_2 и φ_3 и их вторые производные через φ_1 , а также принимая во внимание условия сочленения моментов сил упругости в центре разветвления, получаем систему дифференциальных уравнений в новых обобщенных координатах, целесообразность применения которых убедительно обоснована в работах проф. С.Н. Кожевникова [1986].

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_1 + \frac{\Gamma}{I_1} \omega_1 + \frac{M_{10}}{I_1} &= \frac{\Gamma}{I_1} \omega_0, \\
\dot{\omega}_1 - \frac{\ddot{M}_{10}}{C_1} + \frac{\ddot{M}_{20}}{C_2} + \frac{M_{20}}{I_2} &= \frac{M_2}{I_2}, \\
\dot{\omega}_1 - \frac{\ddot{M}_{10}}{C_1} + \frac{\ddot{M}_{30}}{C_3} + \frac{M_{30}}{I_3} &= \frac{M_3}{I_3}, \\
M_{10} + M_{20} + M_{30} &= 0.
\end{aligned}
\tag{3}$$

Полученная система дифференциальных уравнений (3), устанавливающая зависимость между моментами сил упругости на отдельных участках приведенной системы, описывает поведение машинного агрегата при исследовании динамических процессов. Общее решение однородных уравнений будем искать в виде $A_j e^{\lambda t}$, где λ – ряд характеристических чисел, при которых уравнения обращаются в тождество, A_j – постоянные интегрирования, определяемые начальным состоянием системы.

Подставляя принятое решение в систему (3), в которой правые части положены равными нулю, приравнявая нулю и раскрывая детерминант, составленный из коэффициентов при искомым постоянных A_j , получаем характеристическое уравнение пятого порядка, корни которого определяют собственные частоты системы

$$\left[\frac{\lambda}{I_1} + \frac{\lambda^2}{C_1} \left(\lambda + \frac{\tilde{A}}{I_1} \right) \right] \left[\left(\frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2} \right) + \left(\frac{\lambda}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right] +$$

$$+ \left(\frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) \left(\lambda + \frac{\tilde{A}}{I_1} \right) = 0. \quad (4)$$

Проведенный анализ характеристического уравнения для более простых, в т.ч. и предельных случаев, позволил установить границы устойчивости решений системы, а также численно решить его с дальнейшим уточнением корней по методу итераций И.Ньютона [Бронштейн и Семендяев 1987], оценить влияние диссипации на величину последних.

Из пяти полученных корней уравнения первое, определяющее разгон системы, является действительным, а остальные четыре – комплексные, взаимно-сопряженные, определяющие формы колебания системы.

Приняв одну из амплитуд (A_1) постоянной и выразив остальные через нее, получим передаточные коэффициенты $K_j^{(n)}(\lambda_n)$. Общее решение системы однородных дифференциальных уравнений представим в виде вектора

$$\vec{Y}_0(t) = \{\omega_1(t); M_{10}(t); M_{20}(t); M_{30}(t)\} \quad (5)$$

Частные решения дифференциальных уравнений получены с учетом правой части, представляющей функции внешних моментов. Принимая во внимание экспериментальные диаграммы сил, формирующие внешние моменты в системе, учтя их реальную периодичность, представляли внешнюю нагрузку в виде гармонического ряда Фурье. Используя принцип суперпозиции для линейных систем, находим реакцию системы на каждую гармоническую составляющую, суммируя затем полученные результаты.

Частные решения могут быть представлены в виде

$$\vec{Y}_0(t) = \begin{pmatrix} M_{10}(t) \\ M_{20}(t) \\ M_{30}(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = M_2^0 e^{\lambda_k t} \begin{pmatrix} K_1(\lambda_k) \\ K_2(\lambda_k) \\ K_3(\lambda_k) \\ K_\omega(\lambda_k) \end{pmatrix} + M_3^0 e^{\lambda_3 t} \begin{pmatrix} K_1(\lambda_3) \\ K_2(\lambda_3) \\ K_3(\lambda_3) \\ K_\omega(\lambda_3) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Анализ характеристического уравнения

Представляет определенный интерес провести некоторый анализ характеристического уравнения (4).

1. Из рассмотрения уравнения (4) выясняется, что его можно записать в виде

$$A(a+b) + \sqrt{ab}B\sqrt{ab} = 0.$$

Из обоих слагаемых уравнения можно вынести что-то общее, если $a = b$. Это вытекает из известного неравенства $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, в котором знак равенства правомочен только при $a=b$. Вынося за скобки $(a+b)$, выражение $(a+b)$ дает корень, когда $a = b = 0$. Таким образом, переходя к принятым в уравнении (4) обозначениям, имеем

$$\left(\frac{\lambda^2}{C^2} + \frac{1}{I_2} \right) = \left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) = 0.$$

Это означает, что равенство возможно при $\frac{C_2}{I_2} = \frac{C_3}{I_3}$, т.е. равенстве или пропорциональности масс и жесткостей, следовательно, и равенстве цикловых частот $\omega_0 = \sqrt{-\frac{C_2}{I_2}} = \sqrt{-\frac{C_3}{I_3}}$, откуда $\lambda = \pm i\omega_0$.

В этом случае в уравнении (4) а и b можно вынести за скобки, внутри которых останется уравнение третьего порядка

$$(\lambda^2 + \omega_0^2) \left\{ \left[\frac{\lambda}{I_1} + \frac{\lambda^2}{C_1} \left(\lambda + \frac{\tilde{A}}{I_1} \right) \right] \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) + \frac{1}{C_2} \left(\lambda + \frac{\tilde{A}}{I_1} \right) \left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right\} = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) в фигурных скобках наиболее просто и точно решается при $I_1 = I_2 = I_3 = I$ и при $C_1 = C_2 = C_3 = C$. При этом оно преобразуется таким образом

$$\lambda^3 + \frac{\Gamma}{I} \lambda^2 + \frac{C}{I} \left(\lambda + \frac{\Gamma}{3I} \right) = 0. \quad (8)$$

Можно заметить, что ход решения (8) зависит от величины отношения $\frac{C}{I} \gg 1$. При $\frac{C}{I} \rightarrow 0$ получаем $\lambda = -\frac{\Gamma}{I}$, а при $\frac{C}{I} \rightarrow \infty$ из последнего слагаемого имеем $\lambda = -\frac{\Gamma}{3I}$, т.е. корни уравнения (8) лежат в пределах $-\frac{\Gamma}{3I} < \lambda < -\frac{\Gamma}{I}$. Для решения уравнения (8) приведем его к безразмерному виду, введя обозначения:

$$\lambda = \frac{\Gamma}{I} x \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{CI}{\Gamma^2},$$

тогда имеем:

$$x^3 + x^2 + \alpha \left(x + \frac{1}{3} \right) = 0 \quad (9)$$

2. Уравнение (9) решается по известной формуле Кардана, положив $y = x + \frac{1}{3}$. Тогда

$$y^3 + \frac{3\alpha - 1}{3}y + \frac{2}{27} = 0. \quad (10)$$

Обозначая $\frac{3\alpha - 1}{3} = 3p$ и $\frac{2}{27} = 2q$, получим.

$$y^3 + 3py + 2q = 0$$

Если дискриминант уравнения $D = q^2 + p^3 = 3^{-4} \alpha [3\alpha^2 - 3\alpha + 1] > 0$, больше нуля, как в данном случае, то имеем один действительный и два комплексных корня:

$$\begin{aligned} y_1 &= U + V; & y_2 &= -\frac{1}{2}(U + V) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(U - V); \\ y_3 &= -\frac{1}{2}(U + V) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(U - V); & \text{где: } U &= \sqrt[3]{-\frac{1}{27} + \frac{1}{9}\sqrt{\alpha(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)}}; \\ & & V &= \sqrt[3]{-\frac{1}{27} - \frac{1}{9}\sqrt{\alpha(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)}}. \end{aligned}$$

Для проверки положим $\alpha \rightarrow 0$, тогда:

$$V = U = -\frac{1}{3}; \quad y_1 = -\frac{2}{3}; \quad x_1 = y - \frac{1}{3} = -1.$$

При $\alpha \rightarrow \infty: U \rightarrow -V; U + V \rightarrow 0; y_1 = 0; x_1 = -\frac{1}{3}$.

Интересно проследить за ходом суммы $U + V$ в функции α , которая формирует значение корней характеристического уравнения. При увеличении α значение $U \rightarrow \sqrt{\alpha}$, но всегда остается ниже $\sqrt{D}$, а значение $U \rightarrow -\sqrt{\alpha}$, оставаясь ниже $-\sqrt{D}$.

Сумма $U + V$ всегда будет отрицательной, чем определяется устойчивость решения системы.

Предположим, что жесткости системы велики $C_j \rightarrow \infty$, тогда пренебрегая в уравнении (4) величинами $\frac{\lambda^2}{C_j}$ имеем

$$\frac{\lambda}{I_1} \left(\frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} \right) + \frac{1}{I_2 I_3} \left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \right) = 0, \quad (11)$$

Откуда:

$$\lambda_1 = -\frac{\Gamma}{I_1 + I_2 + I_3}.$$

Допустим далее, что только $C_{2,3} \rightarrow \infty$, тогда $I_2 + I_3 = I$, и полученное уравнение третьего порядка будет иметь вид, соответствующий двухмассовой модели нашей системы

$$\left[\frac{\lambda^3}{C_1} + \frac{\lambda^2}{C_1} \cdot \frac{\Gamma}{I_1} \right] + \left[\lambda \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I} \right) + \frac{\Gamma}{I_1 I} \right] = 0. \quad (12)$$

Из уравнения (12) также вытекает, что при $C_1 \rightarrow \infty$: $\lambda_1 = -\frac{\Gamma}{I_1 + I_2 + I_3}$.

При малых $C_1 \rightarrow \infty$ в уравнении (12) будут велики два первых слагаемых, всвязи с чем имеем:

$$\frac{\lambda^2}{C_1} \left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \right) \approx 0; \quad \lambda_1 = -\frac{\Gamma}{I_1}.$$

Таким образом, при слабой связи C_1 скорость нарастания угловой частоты двигателя определяется только его характеристикой Γ и динамическим параметром I_1 . Из последнего можно заключить, что первый малый корень λ_1 определяет скорость разгона системы, он всегда должен быть действительным и больше нуля.

3. Допустим, что надо найти корни $|\lambda| \gg \frac{\Gamma}{I_1}$. Тогда заменим $\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \rightarrow \lambda$ и частотное уравнение (4) сведется к выражению

$$\left(\frac{\lambda^2}{C_1} + \frac{1}{I_1} \right) \left(\frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2} \right) + \left(\frac{\lambda^2}{C_1} + \frac{1}{I_1} \right) \left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) + \left(\frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) = 0 \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (13) является биквадратным и легко решается в числах. Проведенный анализ характеристического или частотного уравнения (4) дал возможность разработать схему решения уравнения пятого порядка. При значительном различии частоты разгона двигателя $|\lambda_1| = \frac{\Gamma}{I_1} \cong 10 \div 15 \text{ с}^{-1}$ и

парциальных частот $\sqrt{\frac{C_j}{I_j}} \cong 50 \div 70 \text{ с}^{-1}$ принимаем такую схему решения, при

которой сначала определяем приближенно значения корня λ_1 из уравнения (11),

корней λ_{2-5} из биквадратного уравнения (13), а затем уточняем их значения по методу итераций Ньютона [Бронштейн и Семендяев 1987].

Дальнейшая проверка уточненных корней может показать достаточную точность произведенных вычислений

$$(-1)^5 \prod_1^5 \lambda_j = \frac{a_6}{a_1}.$$

В нашей работе подтверждается отмеченный в литературе факт, что при наличии в системе к масс характеристическое уравнение с моментом двигателя в функции угловой частоты будет иметь порядок $2k-1$ (для нашего случая он равен пяти (нечетный порядок)). Подтверждается и то, что один из корней является действительным числом и меньшим нуля, а остальные – комплексные с отрицательной вещественной частью.

На первый взгляд противоречивым представляется то обстоятельство, что корни λ_{2-5} в системе без учета демпфирования являются не чисто мнимыми, а комплексными с малою действительной частью, которая появилась лишь в результате уточнения корней. Поясним это на примере.

Представим, что имеем агрегат с двигателем, момент инерции которого I , момент движущий – M в функции угловой скорости, как в нашем случае, и вал с жесткостью c , который резко застопорили. Дифференциальное уравнение вращения будет иметь вид:

$$I\ddot{\varphi} = M - C\varphi. \quad (a)$$

Введя функцию момента двигателя

$$M = M_n \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_0 - \omega_n} = \Gamma(\omega_0 - \omega_1) = \Gamma(\omega_0 - \dot{\varphi}),$$

получим неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\Gamma}{I}\dot{\varphi} + \frac{C}{I}\varphi = \frac{\Gamma}{I}\omega_0 \quad (б)$$

Решение характеристического уравнения $\lambda^2 + \frac{\Gamma}{I}\lambda + \frac{C}{I} = 0$ (в) получим в форме

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\Gamma}{2I} \pm i\sqrt{\frac{C}{I} - \left(\frac{\Gamma}{2I}\right)^2}. \quad (г)$$

Обозначая $\frac{\Gamma}{2I}$ через δ , $\frac{C}{I}$ через ω_0 , получаем

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_1, \text{ где } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего (б), будет таковым:

$$\varphi = A_{1,2} e^{(-\delta \pm i\omega_1)t} \quad (\text{д})$$

Вид решений (д) свидетельствует о том, что в системах, описываемых уравнением (б), имеют место затухающие колебания, декремент которых зависит от величины действительной части каждого из корней.

Как уже отмечалось выше, для получения частных решений линейной динамической системы необходимо найти ее отклик на внешний момент, то есть получить амплитуды и фазы наведенных моментов. Используя принцип суперпозиции, искали сначала реакцию системы на один внешний момент M_2 , положив $M_3 = 0$, потом аналогично – на M_3 , сложив оба результата. Весьма существенным при этом представляется правильное аналитическое выражение моментов внешних сил.

Например, анализ осциллограммы момента сил упругости на третьем валу показал, что его можно с достаточной для практики точностью представить в виде

$$M_3 = M_{cp} + M_3^0 \sin \omega t,$$

где:

$\omega = 100$ рад/с – реальная частота процесса;

$M_{cp} = 150$ Нм – среднее значение постоянной составляющей.

$M_3^0 = 100$ Нм – максимальная амплитуда синусоиды.

Для обеспечения возможности аналитического представления внешнего момента M_2 на измельчающем аппарате кукурузоуборочного комбайна был проделан специальный эксперимент. На разрывной машине с помощью специального приспособления на регистрирующем устройстве были получены диаграммы сил резания стеблей кукурузы (рис.2), которые позволили установить, что их кривые могут быть с достаточным приближением аппроксимированы синусоидальной полуволной.

Принимая во внимание реальную конструкцию ротора измельчителя и учитывая технологическую схему работы аппарата, нетрудно убедиться, что внешняя нагрузка при измельчении носит импульсный характер. Продолжительность синусоидального импульса τ в 5-6 раз (в зависимости от толщины перерабатываемого материала) меньше периода его повторения T .

В целях использования принципа суперпозиции для линейных систем разложим синусоидальный импульс в гармонический ряд Фурье на длине всего периода T . Для этого представим функцию момента на измельчителе комбайна выражением.

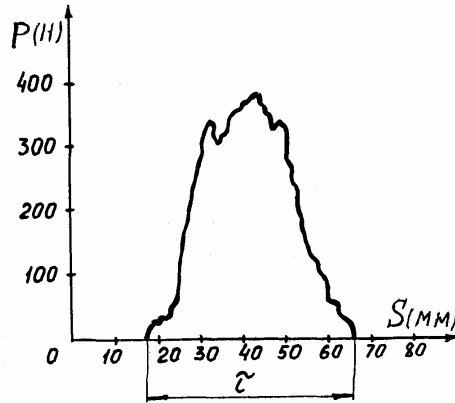


Рис. 2. Диаграмма сил резания стеблей кукурузы

Fig. 2. A draft of the corn cobs cutting forces

$$f(t) = A \sin \frac{\pi}{\tau} t \quad \text{при } 0 < t < \tau,$$

$$f(t) = 0 \quad \text{при } \tau < t < T$$

где:

A – амплитудное значение момента.

Гармонический ряд в общем виде может быть представлен

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos K \frac{2\pi}{T} t + b_k \sin K \frac{2\pi}{T} t \right), \quad (14)$$

где:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos K \frac{2\pi}{T} t dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin K \frac{2\pi}{T} t dt,$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T \sin \frac{\pi}{\tau} t dt.$$

Определим неизвестные коэффициенты Фурье a_k, b_k и постоянный член a_0 . Для этой цели интегрируем выражение

$$a_k = \frac{2A}{T} \int_0^T \sin \frac{\pi}{\tau} t \cos K \frac{2\pi}{T} t dt, \quad (15)$$

Которое при использовании табличного интеграла после ряда преобразований будет иметь вид

$$a_k = 2 \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{1 - \left(2k \frac{\tau}{T}\right)^2} \left(1 + \cos K \frac{2\pi}{T} \tau\right) \quad (16)$$

$$b_k = \frac{2}{T} A \int_0^T \sin \frac{\pi}{\tau} t \sin K \frac{2\pi}{T} t dt = 2 \cdot \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{1 - \left(2k \frac{\tau}{T}\right)^2} \sin K \frac{2\pi}{T} \tau. \quad (17)$$

Свободный член имеет вид

$$a_0 = \frac{2}{T} A \int_0^{\tau} \sin \frac{\pi}{\tau} t dt = \frac{2}{T} A \frac{\tau}{\pi} (1 - \cos \pi) = 4 \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T} \quad (18)$$

В окончательной форме ряд представляется выражением

$$S(t) = 2 \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T} + 2 \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T} \sum_1^{\infty} \frac{1}{1 - \left(2k \frac{\tau}{T}\right)^2} \times \\ \times \left[\left(1 + \cos K \frac{2\pi}{T} \tau\right) \cos K \frac{2\pi}{T} t + \sin K \frac{2\pi}{T} \tau \sin K \frac{2\pi}{T} t \right]. \quad (19)$$

Для суждения о сходимости ряда проведем оценку убывания его членов. Рассмотрим выражения, формирующие убывание:

$$a_k^1 = \frac{1 + \cos k \frac{2\pi}{T} \tau}{1 - \left(2k \frac{\tau}{T}\right)^2}; \quad b_k^1 = \frac{\sin k \frac{2\pi}{T} \tau}{1 - \left(2k \frac{\tau}{T}\right)^2}. \quad (20)$$

Их можно представить как функции аргумента $\alpha = k \frac{2}{T} \tau$

$$a_k^1 = \frac{1 + \cos \pi \alpha}{1 - \alpha^2}; \quad b_k^1 = \frac{\sin \pi \alpha}{1 - \alpha^2}.$$

Определим, где эти коэффициенты станут малыми: $\alpha = \left\{ \frac{2\tau}{T} \rightarrow \infty \right\}$.

При $\alpha = 0 \Rightarrow a_k^1 = 2; \quad b_k^1 = 0;$

При $\alpha = 1 \Rightarrow a_k^1 = \frac{0}{0}; \quad b_k^1 = \frac{0}{0};$

Раскроем неопределенности типа $\frac{0}{0}$ по правилу Лопиталя, взяв производные:

$$a_k^1(1) = \frac{-\pi \sin \pi \alpha}{2\alpha} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha} = 0,$$

$$b_k^1(1) = \frac{\pi \cos \pi \alpha}{-2\alpha} = \frac{\pi}{2}.$$

Как можно видеть (рис. 3 и 4), убывание величин амплитуд членов a_k^1 пропорционально выражению $\frac{2}{1-\alpha^2}$, а для $b_k^1 - \left(\frac{1}{1-\alpha^2}\right)$.

Если принять точность до 10%, то $\frac{1}{1-\alpha^2} \cong \frac{1}{\alpha^2} = 0,1$. Тогда $\alpha = 3,16$.

Отсюда $k = \frac{\alpha T}{2\tau} \approx 8$, где $\frac{T}{\tau} = 5$.

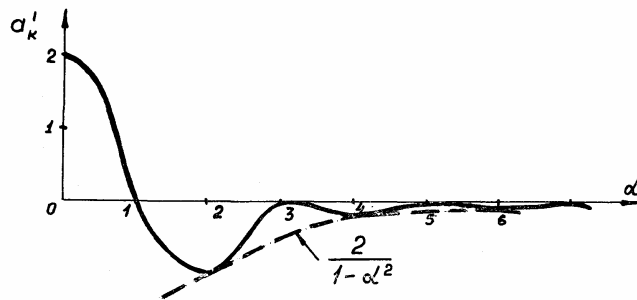


Рис. 3. Характер убывания коэффициента a_k

Fig. 3. The characteristics of the coefficient a_k decrease

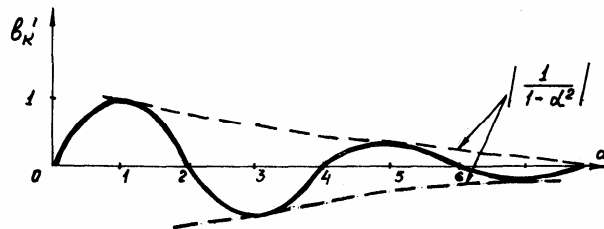


Рис. 4 Характер убывания коэффициента b_k

Fig. 4. The characteristics of the coefficient b_k decrease

Таким образом, число кратных гармоник, которые надо взять при заданной точности, должно быть не менее восьми.

Проведя расчет реакции системы на момент M_3 и на каждую из гармонических составляющих ряда Фурье момента M_2 , получаем частные

решения дифференциальных уравнений для искомых величин $\omega_1, M_{10}, M_{02}, M_{03}$. Складывая частные решения с общим решением однородных уравнений, получаем общее решение неоднородных дифференциальных уравнений.

ВЫВОДЫ

В работе подтверждается отмеченный в литературе факт, что при наличии в системе k масс характеристическое уравнение с моментом двигателя в функции угловой частоты будет иметь порядок $2k-1$ (для нашего случая он равен пяти нечетный порядок). Подтверждается и то, что один из корней является действительным числом и меньшим нуля, а остальные – комплексные с отрицательной вещественной частью.

Появление в уравнениях (3) члена, пропорционального угловой скорости $\dot{\phi}$, является формальным признаком демпфирования системы. В исследуемой нами системе таким признаком служит инерционно-силовая характеристика двигателя $\frac{I}{I_1}$. Относительная малость этой величины влечет за собой и малость действительной части при комплексных корнях, которая появилась лишь в результате уточнения по методу итераций.

Таким образом, в описываемой системе имеют место затухающие колебания, декремент которых зависит от величины действительной части каждого из комплексных корней.

ЛИТЕРАТУРА

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. 1987: Справочник по высшей математике. Физматгиз, 458 с.
Кожевников С.Н. 1986: Динамика нестационарных процессов в машинах. Техника, 362 с.

TOWARDS THE DYNAMIC CALCULATION OF MACHINES

Summary. The paper presents the methods of drawing up of an equivalent dynamic model of a combined machines complex, also, the differential equations of movement are made and solved in view of the received experimentally and approximated moments on working bodies. Furthermore, an analysis of the characteristic equation is presented and the conclusions are drawn.

Key words: machine, a drive, system, reliability, angular speed, a part, transmission, model, a mechanism, weight, a combine, a degree of freedom, the moment of force, the moment of inertia.

Reviewer: Volodymyr Bulgakov, Prof. Sc. D. Eng.