MOTROL, 2006, 8, 40–57

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ВІБРАЦІЙНОГО ВИЛУЧЕННЯ КОРЕНЕПЛОДІВ З ҐРУНТУ НА БАЗІ РІВНЯНЬ ЕЙЛЕРА

Volodymyr Bulgakov*, Ivan Holovach*, Janusz Nowak**

*National Agrarian University of Ukraine, Kyiv

**Akademia Rolnicza w Lublinie

Анотація. На підставі застосувань рівнянь Ейлера розроблена нова математична модель вібраційного викопування коренеплоду з ґрунту. Отримана система диференціальних рівнянь у загальному випадку дозволяє найбільш точно аналітично досліджувати вказаний технологічний процес.

Ключові слова: коренеплід, вібраційний робочий орган, математична модель, силова схема, диференціальні рівняння

ВВЕДЕНІЕ

Розробка та дослідження нових технологічних процесів та робочих органів для викопування коренеплодів з ґрунту є актуальною задачею галузі буряківництва, оскільки саме збирання коренеплодів є однією з найбільш трудомістких та енергомістких його операцій. Застосування при викопуванні коренеплодів з ґрунту вібраційних зусиль обумовлює найменші затрати енергії на руйнування ґрунту, що оточує коренеплоди і сприяє меншим їх втратам та пошкодженню при збиранні. Тому, саме цей технологічний процес потребує докладного аналітичного дослідження та подальшої розробки і впровадження вдосконалених вібраційних викопуючих робочих органів.

Розроблена в [Булгаков и др. 2003] теорія власних і вимушених повздовжніх коливань тіла коренеплоду, закріпленого у ґрунті, що виникають внаслідок дії у повздовжньо-вертикальній площині вібраційного викопуючого робочого органу, дає можливість провести оцінку впливу зазначених коливань на процес руйнування зв'язків коренеплоду з ґрунтом. Проте даного дослідження недостатньо для повного аналізу вилучення коренеплоду з ґрунту. Необхідно окремо розглянути динамічну систему коренеплід – робочий орган з метою дослідження процесу коливань коренеплоду у ґрунті та його вилучення з ґрунту як твердого тіла, що відбувається під дією вібраційного викопуючого робочого органу у зазначеній площині та внаслідок його поступального руху.

Слід відмітити, що в процесі вилучення коренеплоду з ґрунту звичайним лемішним копачем важливу роль відіграють сили підпору ґрунту, завдяки яким пласт стискається у звуженому руслі копача, а тому при подальшому його руйнуванні при поступальному русі копача виникають необхідні для коренеплоду вертикальні сили вилучення. Таким чином, наявність сил підпору ґрунту є необхідною умовою роботи звичайного лемішного викопуючого робочого органу.

При викопуванні ж коренеплодів вібраційним викопуючим робочим органом, внаслідок коливального руху його лемешів, ґрунт у зоні робочого русла копача значно розпушується, а тому зазначені вище сили підпору коренеплоду вже не відіграють такої важливої ролі, як при роботі лемішного копача, оскільки не відбувається необхідної деформації стискання ґрунту в руслі копача при його поступальному русі і контакті з коренеплодом. Як зазначено в [Погорелый *и др* 1983], наявність ґрунту у робочому руслі вібраційного копача не є основною умовою для створення зусилля вилучення коренеплоду з ґрунту. В цьому полягає істотна відмінність виконання технологічного процесу викопування коренеплодів вібраційним копачем перед іншими типами викопуючих робочих органів. Тут необхідні для коренеплодів вертикальні зусилля вилучення створюються внаслідок вертикальних рухів лемешів копача, які мають нахили у просторі під відповідними кутами, що дозволяє захоплювати коренеплоди звуженим руслом і втягувати їх у сумісний рух догори. Робочі поверхні лемешів вібраційного копача, що мають, як було сказано раніше, відповідні нахили у просторі і створюють звужено русло, також створюють для коренеплодів вертикальні зусилля вилучення. У роботі [Погорелый *и др* 1983] також зазначається, що якщо у руслі звичайного дискового або лемішного викопуючого робочого органу коренеплід при наявності сил підпору ґрунту досить істотно нахиляється у напрямку руху, то в руслі вібраційного копача вісь коренеплоду при його вилученні з ґрунту в основному зберігає положення, майже вертикальне і перпендикулярне до осі рядка, або відхиляється від даного положення на невеликі кути (це обумовлене, в основному, твердістю ґрунту, який оточує коренеплід).

Така особливість у роботі вібраційного викопуючого робочого органу створює умови, за яких обламування коренеплодів внаслідок нахилу їх осі в напрямку поступального руху значно зменшується. При вібраційному викопуванні в процесі інтенсивного руйнування ґрунту в передній частині, а потім захваті і примусовому вертикальному переміщенні коренеплодів за рахунок надання їм значних прискорень вони також інтенсивно очищуються від налиплого ґрунту. Таким чином, вилучення коренеплоду з ґрунту при вібраційному викопуванні відбувається за рахунок безпосереднього захвату коренеплоду лемешами вібраційного викопуючого робочого органу і подальшого переміщення по внутрішніх поверхнях лемешів, які мають відповідний нахил у просторі і створюють звужене русло, під дією збуруючої сили, що надається від механізму приводу.

МЕТОДИКА ІССЛЕДОВАНІЙ

Розробити теорія безпосереднього вилучення коренеплоду з ґрунту вібраційним викопуючим робочим органом, застосувавши при цьому кінематичні та динамічні рівняння Ейлера.

РЕЗУЛЬТАТИ ИССЛЕДОВАНІЙ

Розглянемо докладно вилучення коренеплоду з ґрунту. Оскільки захват коренеплоду здійснюється вібраційним викопуючим робочим органом, у якого викопуючі лемеші рухаються у вертикальній площині, то коренеплід буде здійснювати вертикальні поздовжні коливання разом з оточуючим коренеплід ґрунтом. Такі коливання є поступальними, а тому достатньо розглянути коливання однієї точки коренеплоду, наприклад центра його мас або точки закріплення у ґрунті. Зв'яжемо з вібраційним викопуючим робочим органом прямокутну декартову систему координат $O_1x_1y_1z_1$, центр O_1 якої знаходиться посередині звуженого русла копача, вісь O_1x_1 співпадає з напрямком поступального руху копача, вісь O_1z_1 має напрямок вгору, а вісь O_1y_1 спрямована у правий бік копача (рис. 1). Дані коливання необхідно розглядати відносно даної нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$. Введемо рухому систему координат $Oxyz$, жорстко зв'язану з коренеплодом, початок якої знаходиться в точці закріплення O, вісь Oz напрямлена вздовж осі симетрії коренеплоду, осі Ox і Oy розташовані у площині, перпендикулярній осі Oz (див. рис. 1).

Крім того, для опису поворотів коренеплоду відносно точки закріплення O необхідно ввести ще одну прямокутну декартову систему координат $O_2x_2y_2z_2$, як це показано на рис. 1.

Оскільки під час захвату коренеплоду вібраційним викопуючим робочим органом він рухається поступально у напрямку осі O_1x_1 (O_1x_2), то коренеплід відхилиться від вертикального положення (від осі Oz_2) на деякий кут ψ по ходу руху копача. Крім того, в загальному випадку, захват коренеплоду робочим органом може бути несиметричним. Якщо один з лемешів здійснить безпосередній контакт з коренеплодом, а другий – через деякий шар розпушеного ґрунту, то, внаслідок деформації даного шару ґрунту, коренеплід відхилиться від вертикального положення в поперечному напрямку на деякий кут θ.

До того ж, внаслідок різниці крутних моментів з боку безпосереднього контакту коренеплоду з одним лемешем та з боку контакту з другим лемешем через деякий шар ґрунту, може здійснюватись поворот коренеплоду на деякий кут φ навколо осі Oz.

Отже, коренеплід здійснює поворот навколо деякої лінії OH (лінії вузлів) на кут θ, поворот навколо осі Oz_2 на кут ψ та поворот навколо осі Oz на кут φ.

Таким чином, введені кути повороту коренеплоду під час вилучення є кутами Ейлера, причому кут θ має назву кута нутації, кут ψ – кута прецесії, кут φ – кута власного обертання (повороту).

Оскільки тіло коренеплоду має конусоподібну форму, то при опусканні робочого органу вниз на коренеплід, як було зазначено вище, перестає діяти збуруюча сила, а тому коренеплід, внаслідок пружності оточуючого його попереду ґрунту і пружності власного тіла, намагатиметься повернутися у вертикальне положення рівноваги. При наступному захваті вказаний процес повторюється.

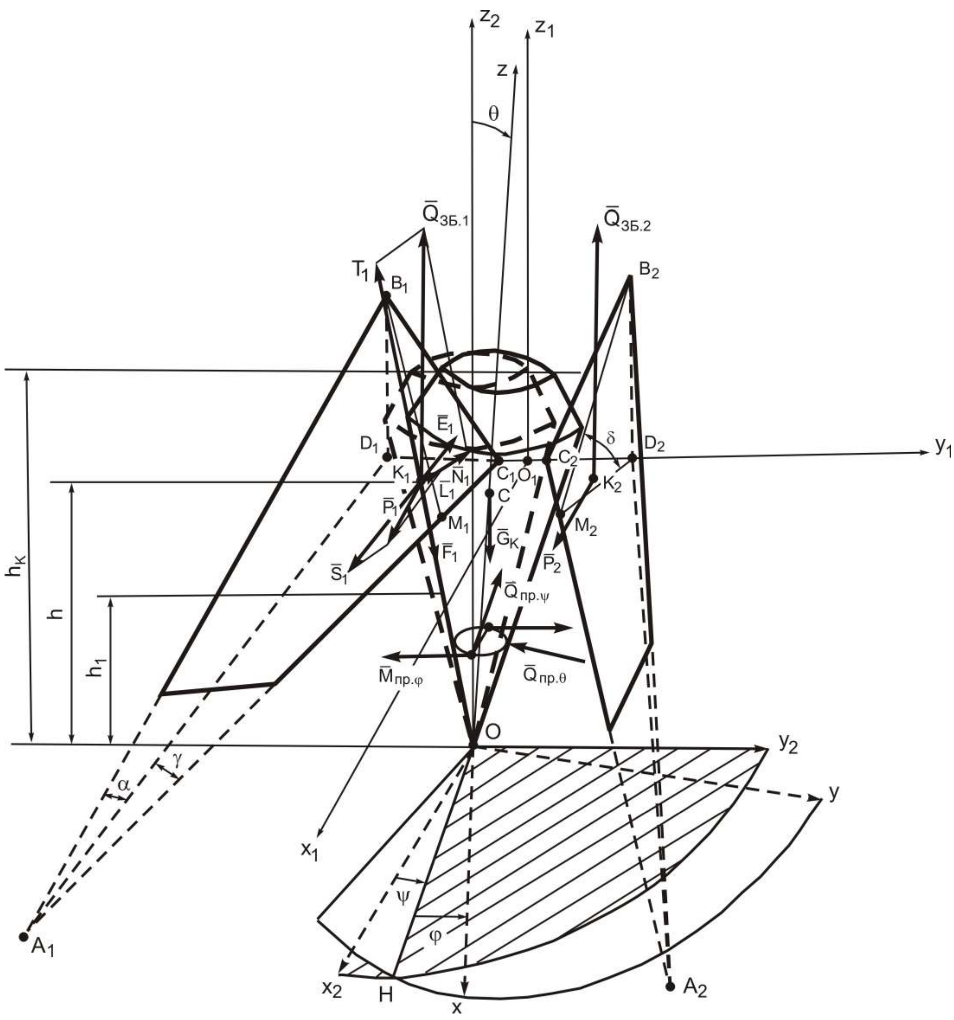

Рис. 1. Схема взаємодії вібраційного викопуючого робочого органу з коренеплодом

Fig. 1. The circuit of an interaction of the vibrating digging out working body with a root crop

Отже коренеплід буде здійснювати коливання навколо лінії вузлів OH, навколо осі Oz_2 та навколо осі Oz. Таким чином, коливання коренеплоду на першому етапі вилучення складаються з повздовжніх лінійних коливань точки O закріплення коренеплоду у ґрунті та кутових коливань коренеплоду відносно точки O закріплення, що описуються зміною кутів Ейлера $\theta,\ \psi$ і φ.

Складемо еквівалентну схему взаємодії коренеплоду з робочими поверхнями вібраційного викопуючого робочого органу на першому етапі вилучення. Для чого представимо вібраційний викопуючий робочий орган у вигляді двох клинів $A_1B_1C_1$

і $A_2B_2C_2$, кожний з яких у просторі має нахил під кутами α, β, γ і які встановлено таким чином один до одного, що утворюється робоче русло, задня частина якого звужується (рис. 1). Вказані клини здійснюють коливальні рухи в повздовжньо-вертикальній площині (механізм приводу лемешів у коливальний рух не показано), напрямок поступального руху вібраційного викопуючого робочого органу показано стрілкою. Проекції точок B_1 і B_2 на вісь O_1y_1 позначимо точками D_1 і D_2 відповідно.

Вважаємо, що з поверхнями клинів $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ у відповідних точках взаємодіє коренеплід, який апроксимується тілом конусоподібної форми, причому в загальному випадку захват коренеплоду робочим органом може бути несиметричним. Це зумовлено тим, що вісь матеріальної симетрії коренеплоду (вісь Oz) може бути дещо зміщеною у бік відносно осі рядка. Вважаємо, що перед початком безпосереднього контакту коренеплоду з робочим органом вісь Oz паралельна осі O_1z_1.

Припускаємо далі, що робоча поверхня клина $A_1B_1C_1$ здійснює безпосередній контакт з коренеплодом у точці K_1, а поверхня $A_2B_2C_2$ – через деякий шар ґрунту в точці K_2 (рис. 1). Звичайно, в точці K_2 контакт відбувається по деякій площадці ґрунту, що оточує точку K_2, проте K_2 будемо вважати точкою прикладання сил, що діють з боку лемешів через шар ґрунту на коренеплід. Прямі, проведені через точки B_1 і B_2 перпендикулярно до сторін клинів A_1C_1 і A_2C_2 відповідно, утворюють на перетині з зазначеними сторонами клинів відповідні точки M_1 і M_2. Таким чином, δ – це двогранний кут ($\angle B_1M_1D_1$) між нижньою основою $A_1D_1C_1$ та робочою поверхнею клина $A_1B_1C_1$ або двогранний кут ($\angle B_2M_2D_2$) між нижньою основою $A_2D_2C_2$ та робочою поверхнею клина $A_2B_2C_2$. Покажемо сили, які виникають внаслідок взаємодії коренеплоду з вібраційним робочим органом.

Нехай від вібраційного робочого органу діє вертикальна збуруюча сила $\overline{Q}_{зб.}$, яка змінюється за гармонійним законом такого вигляду:

$$Q_{зб.} = H\sin\omega t, \tag{1}$$

де:

H – амплітуда збуруючої сили;
ω – частота збуруючої сили.

Дана сила відіграє основну роль у процесі розпушування ґрунту в зоні робочого русла копача та вилучення коренеплоду. Зазначена збуруюча сила $\overline{Q}_{зб.}$ прикладається до коренеплоду з двох його боків, а тому на схемі вона представлена двома складовими $\overline{Q}_{зб.1}$ та $\overline{Q}_{зб.2}$, які очевидно будуть дорівнювати:

$$Q_{çá.1} = Q_{çá.2} = \frac{1}{2}Í\ \sin\omega t. \tag{2}$$

Дані сили прикладені на відстані h від початку координат (точки закріплення O) і саме вони викликають коливання коренеплоду в поздовжньо-вертикальній площині, які руйнують зв'язки коренеплоду з ґрунтом і створюють для останнього умови вилучення з ґрунту. Для подальших досліджень необхідно проаналізувати зв'язок між коливальним рухом вібраційного робочого органу та дією при цьому збуруючої сили $\overline{Q}_{зб.}$ на коренеплід. Цей аналіз достатньо провести для одного періоду коливань, від $\omega t = 0$ до $\omega t = 2\pi$. Для всіх інших періодів процес буде повторюватись. Як зазначалось вище, збуруюча сила $\overline{Q}_{зб.}$ діє на коренеплід лише тоді, коли робочий орган рухається вгору від свого найнижчого положення до свого найвищого положення. Отже, нехай на відрізку $[0,\pi]$ робочий орган рухається в гору від свого найнижчого положення $-a$, де a - амплітуда коливань робочого органу, а на відрізку $[\pi, 2\pi]$ робочий орган рухається вниз від положення a до положення $-a$. Таким чином, коливання робочого органу повинні здійснюватись за наступним гармонійним законом:

$$z_К = -a\cos\omega t, \tag{3}$$

де:

z_K – відхилення робочого органу від горизонтальної осі, навколо якої відбувається коливання;

ω – частота коливань робочого органу.

Таким чином, при русі робочого органу вгору (від $-a$ до a) на відрізку $[0,\pi]$ збуруюча сила $\overline{Q}_{зб.}$ діє на коренеплід згідно синусоїдального закону (2). При цьому на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ вона зростає від нульового значення $Q_{зб.} = 0$ у точці $\omega t = 0$, до максимального значення $Q_{зб.} = H$ у точці $\omega t = \frac{\pi}{2}$.

На відрізку $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ вона спадає від максимального значення $Q_{зб.} = H$ до мінімального $Q_{зб.} = 0$. На відрізку $[\pi,2\pi]$ робочий орган рухається вниз від a до $-a$, а тому на цьому відрізку збуруюча сила $\overline{Q}_{зб.}$ на коренеплід не діє, а отже, дорівнює нулю. На відрізку $[2\pi,4\pi]$ все повторюється спочатку. Таким чином у загальному випадку, на відрізках $[2k\pi, (2k+1)\pi], k = 0, 1, 2, \ldots$, збуруюча сила $\overline{Q}_{зб.}$ діє на коренеплід за синусоїдальним законом (3), а на відрізках $[(2k-1)\pi, 2k\pi], k = 1, 2, \ldots$, вона на коренеплід не діє, тобто дорівнює нулю.

Оскільки ріжучі кромки A_1C_1 і A_2C_2 лемешів знаходяться нижче точок контакту K_1 і K_2, то в зоні захвату коренеплоду робочим органом грунт буде уже досить розпушеним, адже розпушування ґрунту в першу чергу відбувається в передній частині робочого русла копача, а безпосередній контакт коренеплоду з робочим органом – у середній і задній частинах робочого русла копача. Таким чином, при несиметричному захваті коренеплоду в точці контакту K_1 на коренеплід безпосередньо діє збуруюча сила $\overline{Q}_{зб.1}$, а в точці контакту K_2 збуруюча сила $\overline{Q}_{зб.2}$ діє тільки на шар розпушеного ґрунту і тому вважаємо, що ця сила на коренеплід майже не передається, оскільки зусилля може передаватись лише через досить пружне середовище. Отже, при першому захваті в даному випадку дією сили $\overline{Q}_{зб.2}$ на коренеплід можна знехтувати і вважати, що на коренеплід діє лише збуруюча сила $\overline{Q}_{зб.1}$ з боку поверхні $A_1B_1C_1$.

Звичайно, при другому, чи третьому захватах коренеплоду робочим органом, внаслідок звуженості робочого русла і поступального руху копача, безпосередній контакт коренеплоду з робочим органом буде здійснюватись на обох лемешах, в крайньому випадку через тонкий шар ґрунту. Можна вважати, що через тонкий шар ґрунту збуруюча сила передається на коренеплід повністю, різниця (ймовірна) може бути лише в силах тертя, які виникають на робочих поверхнях лемешів, внаслідок різних коефіцієнтів тертя. Проте несиметричний захват коренеплоду цікавий тим, що при ньому можливий поворот коренеплоду навколо своєї осі, що сприяє інтенсивному руйнуванню зв'язків коренеплоду з ґрунтом (ефект вертіння коренеплоду у ґрунті при його вилученні). Отже, при несиметричному захваті коренеплоду робочим органом у диференціальних рівняннях руху коренеплоду буде враховуватись лише силова дія з боку робочої поверхні $A_1B_1C_1$ клина. З цією метою розкладемо силу $\overline{Q}_{зб.1}$ на дві складові: нормальну $\overline{N}_1$ до поверхні $A_1B_1C_1$ та дотичну $\overline{T}_1$ до цієї поверхні, як це показано на рис. 1. Отже ця сила буде дорівнювати:

$$\overline{Q}_{зб.1} = \overline{N}_1 + \overline{T}_1 . \tag{4}$$

Очевидно, що вектор сили $\overline{T}_1$ напрямлений паралельно прямій B_1M_1.

Оскільки копач рухається поступально у напрямку осі O_1x_1 відносно коренеплоду, який закріплений у ґрунті, то в напрямку поступального руху (осі O_1x_1) діє рушійна сила $\overline{P}_1$, яка у момент захвату коренеплоду робочим органом також діє на коренеплід у напрямку заданої осі. Розкладемо також силу $\overline{P}_1$ на дві складові: нормальну $\overline{L}_1$ до поверхні клина $A_1B_1C_1$ і дотичну $\overline{S}_1$ до цієї поверхні, тобто:

$$\overline{P}_1 = \overline{L}_1 + \overline{S}_1 . \tag{5}$$

Вектор сили $\overline{S}_1$ лежить на прямій, що утворена перетином площини, яка проходить через вектори $\overline{P}_1$ і $\overline{L}_1$, і площини $A_1B_1C_1$.

Таким чином, у точці контакту K_1 на коренеплід з боку клина $A_1B_1C_1$ діє сила, що дорівнює

$$\overline{N}_{K_1} = \overline{N}_1 + \overline{L}_1, \tag{6}$$

яка напрямлена по нормалі до поверхні клина $A_1B_1C_1$.
Очевидно, що величина цієї сили дорівнює:

$$N_{K_1} = N_1 + L_1, \tag{7}$$

Крім того, у точці контакту K_1 діє сила тертя $\overline{F}_{K_1}$, яка протидіє проковзуванню коренеплоду по робочій поверхні клина $A_1B_1C_1$ під час його захвату вібраційним робочим органом. Вектор цієї сили напрямлений протилежно вектору відносної швидкості проковзування клина по поверхні коренеплоду. У центрі ваги коренеплоду (точка C) діє сила ваги коренеплоду $\overline{G}_k$. Крім того, у момент захвату коренеплоду вібраційним викопуючим робочим органом, при русі його лемешів вгору, на коренеплід діє сила пружної деформації ґрунту вздовж осі Oz, яка на рис. 1 позначена через $\overline{R}_{z_1}$.

Визначимо величини всіх зазначених вище сил, що діють на коренеплід під час його контакту з вібраційним викопуючим робочим органом. Дотична складова $\overline{T}_1$ збуруючої сили $\overline{Q}_{зб.1}$ і дотична складова $\overline{S}_1$ рушійної сили $\overline{P}_1$ безпосередньо на коренеплід не діють, вони лише викликають розпушування ґрунту навколо коренеплоду, а отже в диференціальні рівняння руху коренеплоду як твердого тіла входити не будуть. Зі схеми рис. 1 отримаємо вирази для визначення нормальної $\overline{N}_1$ та дотичної $\overline{T}_1$ складової збуруючої сили $\overline{Q}_{зб.1}$ такого вигляду:

$$N_1 = Q_{зб.1} \cdot \cos\delta, \tag{8}$$

$$T_1 = Q_{зб.1} \cdot \sin\delta. \tag{9}$$

З цієї ж схеми також отримуємо вирази для визначення нормальної $\overline{L}_1$ та дотичної $\overline{S}_1$ складових рушійної сили $\overline{P}_1$, а саме:

$$L_1 = P_1 \cdot \sin\gamma, \tag{10}$$

$$S_1 = P_1 \cdot \cos\gamma. \tag{11}$$

Величина сили $\overline{N}_{K_1}$, враховуючи вирази (7), (8) та (10), буде дорівнювати:

$$N_{K_1} = Q_{зб.1} \cdot \cos\delta + P_1 \cdot \sin\gamma, \tag{12}$$

або враховуючи вираз (2) матимемо:

$$N_{K_1} = \frac{1}{2} H \cdot \cos\delta \sin\omega t + P_1 \cdot \sin\gamma. \tag{13}$$

Тоді величина сили тертя $\overline{N}_{K_1}$ буде дорівнювати:

$$F_{K_1} = f N_{K_1} = f\left(Q_{зб.1} \cdot \cos\delta + P_1 \cdot \sin\gamma\right), \tag{14}$$

або, враховуючи вираз (2), матимемо:

$$F_{K_1} = \frac{1}{2} f H \cdot \cos\delta \sin\omega\, t + f P_1 \cdot \sin\gamma. \tag{15}$$

Очевидно, що під час безпосереднього контакту клина $A_1B_1C_1$ з поверхнею коренеплоду вектор сили тертя $\overline{N}_{K_1}$ буде завжди лежати у площині клина $A_1B_1C_1$. Оскільки на початку захвату коренеплід ще міцно зв'язаний з ґрунтом, то можливе проковзування клина по коренеплоду у напрямку дії сили $\overline{T}_1$ (паралельно лінії B_1M_1) та у напрямку дії сили $\overline{S}_1$.

Зазначені проковзування можуть відбуватись внаслідок дії сил $\overline{Q}_{зб.1}$ та $\overline{P}_1$ відповідно. Тому вектор відносної швидкості проковзування клина по поверхні коренеплоду можна розкласти на складові у зазначених вище напрямах. Отже, силу тертя $\overline{N}_{K_1}$ також можна розкласти на дві складові $\overline{F}_1$ та $\overline{E}_1$ у напрямках, протилежних векторам $\overline{T}_1$ та $\overline{S}_1$ відповідно, тобто:

$$\overline{F}_{K_1} = \overline{F}_1 + \overline{E}_1. \tag{16}$$

Визначимо величини складових $\overline{F}_1$ і $\overline{E}_1$. З наведених вище міркувань та виразу (13) можна зробити висновок, що на відрізках $\left[2k\pi,\ (2k+1)\pi\right],\ k = 0, 1, 2, \ldots$, зокрема на відрізку $[0, \pi]$, величина сили тертя $\overline{F}_{K_1}$ визначається згідно виразу (13), причому на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ вона зростає від мінімальної величини

$$F_{K_1 min} = f P_1 \cdot \sin\gamma, \tag{17}$$

до максимальної величини

$$F_{K_1\,max} = \frac{1}{2} f H \cdot \cos\delta + f P_1 \cdot \sin\gamma, \tag{18}$$

а на відрізку $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$ вона спадає від $F_{K_1\,max}$ до $F_{K_1\,min}$. Причому, напрям вектора на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ також змінюється. Вектор $F_{K_1\,min}$ напрямлений протилежно вектору $\overline{S}_1$, а вектор $F_{K_1\,max}$ відхиляється від вектора $F_{K_1\,min}$ на деякий кут $\alpha_{K_1\,max}$.

Отже, на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ вектор $\overline{F}_{K_1}$ рухається від вектора $F_{K_1\,min}$ до вектора $F_{K_1\,max}$, а на відрізку $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$ – від вектора $F_{K_1\,max}$ до вектора $F_{K_1\,min}$. Таким чином, кут відхилення α_{k1} вектора $\overline{F}_{K_1}$ від вектора $F_{K_1\,min}$ на відрізку $[0, \pi]$ змінюється за наступним законом:

$$\alpha_{K_1} = \alpha_{K_1\,max} \cdot \sin\omega t. \tag{19}$$

Очевидно, що величина $\alpha_{K_1\,max}$ залежить у першу чергу від відношення H/P_1, і буде тим більшою, чим більшим буде зазначене відношення. Отже, на відрізку $[0, \pi]$ величина вектора тертя $\overline{F}_{K_1}$ змінюється згідно закону (13), а напрям – згідно закону (19).

Таким чином, на відрізку $[0, \pi]$ маємо наступні значення складових $\overline{F}_1$ і $\overline{E}_1$:

$$F_1 = F_{K_1} \cdot \sin\alpha_{K_1}, \tag{20}$$

$$E_1 = F_{K_1} \cdot \cos\alpha_{K_1}, \tag{21}$$

або, враховуючи вирази (13) і (19) матимемо:

$$F_1 = \left(\frac{1}{2} f H \cdot \cos\delta \sin\omega t + f P \cdot \sin\gamma\right) \sin\left(\alpha_{K_1 max} \cdot \sin\omega t\right), \tag{22}$$

$$E_1 = \left(\frac{1}{2} f H \cdot \cos\delta \sin\omega t + f P \cdot \sin\gamma\right) \cos\left(\alpha_{K_1 max} \cdot \sin\omega t\right). \tag{23}$$

Вирази (22) і (23) мають місце на будь-якому відрізку $[2k\pi, (2k+1)\pi],\ k = 0, 1, 2, \ldots$

Очевидно, що на відрізках $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, $k = 1, 2, \ldots$, сила тертя $\overline{F}_{k1}$ дорівнює:

$$F_{K_1} = F_{K_1\,min} = f\,P_1 \cdot \sin\gamma\,. \tag{24}$$

Отже, на зазначених відрізках матимемо:

$$E_1 = f\,P_1 \cdot \sin\gamma\,, \tag{25}$$

$$F_1 = 0\,. \tag{26}$$

Обчислимо далі сили, які виникають внаслідок деформації ґрунту, як кружного середовища, при переміщенні в ньому коренеплоду. При повороті коренеплоду на деякий кут φ навколо своєї осі (осі Oz) на поверхні контакту коренеплоду з ґрунтом в зоні його нерозпушеного шару виникає нерозподілене навантаження, вірніше – пара нерозподіленого навантаження, оскільки вектори інтенсивності цього навантаження напрямлені по дотичних до поверхні коренеплоду і розподілені по колу в площинах поперечних перерізів коренеплоду. Дія цієї пари характеризується її моментом відносно осі Oz, напрямленим вздовж осі Oz.

Обчислимо цей момент.

Нехай C – коефіцієнт пружної деформації ґрунту, віднесений до площі контакту, тобто це величина, яка показує, наскільки зростає зусилля на поверхні контакту при зміщенні поверхні контакту на одиницю площі контакту. Даний коефіцієнт вимірюється у (*Н/м*^{2}).

Розглянемо елементарну площадку dF контакту коренеплоду з ґрунтом у його не розпушеній зоні, яка знаходиться на відстані z від точки закріплення O, $0 \le z \le h_1$, де h_1 – глибина знаходження коренеплоду у не розпушеній зоні ґрунту. Радіус поперечного перерізу коренеплоду, що знаходиться на зазначеній відстані z від точки O, буде дорівнювати $z \cdot \operatorname{tg}\varepsilon$, де 2ε – кут при вершині конуса (коренеплід моделюється, як конусоподібне тіло).

Нехай $d\alpha$ – центральний кут, на якій спирається елементарна площадка dF у площині зазначеного поперечного перерізу.

Очевидно, що висота елементарної площадки буде дорівнювати $\dfrac{dz}{\cos\varepsilon}$.

Тоді площа елементарної площадки dF буде дорівнювати:

$$dS = z \cdot \operatorname{tg}\varepsilon \cdot d\,\alpha \cdot \frac{dz}{\cos\varepsilon}\,. \tag{27}$$

При повороті елементарної площадки dF на кут φ оточуючий коренеплід грунт зазнає деформації зсуву на величину dS_φ, що буде дорівнювати:

$$dS_\varphi = \frac{dS}{2\pi} \cdot \varphi,$$

або враховуючи вираз (27), матимемо:

$$dS_\varphi = \frac{z \sin\varepsilon \cdot d\alpha \cdot dz}{2\pi \cdot \cos^2\varepsilon} \cdot \varphi, \tag{28}$$

де:

кут φ – вимірюється у радіанах.

Таким чином, елементарне зусилля пружності ґрунту при повороті елементарної площадки dF на кут φ буде дорівнювати:

$$F_{пр.} = \frac{Cz \sin\varepsilon \cdot d\alpha \cdot dz}{2\pi \cdot \cos^2\varepsilon} \cdot \varphi. \tag{29}$$

Елементарний момент від даного елементарного зусилля відносно осі Oz буде дорівнювати:

$$dM_{пр.\varphi} = -\frac{Cz \sin\varepsilon \cdot d\alpha \cdot dz}{2\pi \cdot \cos^2\varepsilon} \cdot \varphi \cdot z\, tg\varepsilon. \tag{30}$$

Тоді момент пружної деформації ґрунту від повороту коренеплоду на кут φ буде дорівнювати:

$$M_{пр.\varphi} = -\int_0^{h_1}\int_0^{2\pi} \frac{Cz^2 dz \cdot \varphi \cdot \sin^2\varepsilon \cdot d\alpha}{2\pi \cdot \cos^3\varepsilon}. \tag{31}$$

Після інтегрування виразу (31) отримаємо:

$$M_{пр.\varphi} = -\frac{Ch_1^3 \cdot \varphi \cdot \sin^2\varepsilon}{3\cos^3\varepsilon}. \tag{32}$$

Обчислимо далі значення сил пружності ґрунту, які виникають при поворотах закріпленого у ґрунті коренеплоду навколо осі Oz_2 на кут ψ – $\overline{Q}_{пр.\psi}$ та навколо лінії вузлів OH на кут θ – $\overline{Q}_{пр.\theta}$. Очевидно, що зазначені зусилля є також розподіленими навантаженнями по поверхні контакту коренеплоду з нерозпушеним шаром ґрунту. Будемо вважати, що при поворотах коренеплоду на кути ψ і θ деформується та частина ґрунту, яка контактує з половиною бічної поверхні конуса (тобто частини коренеплоду, що знаходиться у не розпушеному шарі ґрунту). Нехай C_1 – коефіцієнт пружної деформації стискання ґрунту, тобто величина, яка показує наскільки зростає напруження на контактній поверхні ґрунту з коренеплодом при переміщенні коренеплоду на одиницю довжини.

Очевидно, що одиницею вимірювання величини C_1 буде $\dfrac{H}{м^2 \cdot м} = \dfrac{H}{м^3}$.

Розглянемо елементарну площадку dF на поверхні контакту, яка знаходиться на відстані z від точки закріплення O. Площа зазначеної площадки, як показано вище, визначається з виразу (27). Тоді елементарне зусилля, що виникає на площадці dF, очевидно буде дорівнювати:

$$dQ_{пр.\psi} = C_1 \frac{z \cdot \psi}{\cos\varepsilon} \cdot dS, \tag{33}$$

де:

$\dfrac{z \cdot \psi}{\cos \varepsilon}$ – переміщення елементарної площадки dF при повороті коренеплоду на кут ψ.

Враховуючи вираз (27), матимемо:

$$dQ_{пр.\psi} = \frac{C_1 \sin\varepsilon \cdot \psi \cdot d\alpha \cdot z^2 dz}{\cos^3\varepsilon}. \tag{34}$$

Тоді повна сила пружності ґрунту $\overline{Q}_{пр.\psi}$, яка є рівнодійною розподіленого навантаження, що виникає при повороті коренеплоду на кут ψ навколо осі Oz_2, буде дорівнювати:

$$Q_{пр.\psi} = \int_0^{h_1}\int_0^{\pi} \frac{C_1 \sin\varepsilon \cdot \psi \cdot d\alpha \cdot z^2 dz}{\cos^3\varepsilon}. \tag{35}$$

Після інтегрування виразу (35), отримаємо:

$$Q_{пр.\psi} = \frac{C_1 \pi \cdot h_1^3 \sin\varepsilon \cdot \psi}{3\cos^3\varepsilon}. \tag{36}$$

Епюра даного розподіленого навантаження симетрична відносно площини, що проходить через вісь Oz у напрямку переміщення коренеплоду на кут ψ. Вектор рівнодійної $\overline{Q}_{пр.\psi}$ лежить у зазначеній площині і перетинає вісь Oz (рис. 1).

Аналогічно визначаємо рівнодійну $\overline{Q}_{пр.\theta}$ розподіленого навантаження, що виникає при повороті коренеплоду на кут θ навколо лінії вузлів OH.

В даному випадку елементарне зусилля $d\overline{Q}_{пр.\theta}$, що виникає на елементарній площадці dF буде дорівнювати:

$$dQ_{пр.\theta} = \frac{C_1 \sin\varepsilon \cdot \theta \cdot d\alpha \cdot z^2 dz}{\cos^3\varepsilon}. \tag{37}$$

Тоді рівнодійна $\overline{Q}_{пр.\theta}$ даного розподіленого навантаження буде дорівнювати:

$$Q_{пр.\theta} = \int_0^{h_1}\int_0^{\pi} \frac{C_1 \sin\varepsilon \cdot \theta \cdot d\alpha \cdot z^2 dz}{\cos^3\varepsilon}. \tag{38}$$

Після інтегрування виразу (38) отримаємо:

$$Q_{пр.\theta} = \frac{C_1 \pi \cdot h_1^3 \sin\varepsilon \cdot \theta}{3\cos^3\varepsilon}. \tag{39}$$

Епюра даного розподіленого навантаження симетрична відносно площини, що проходить через вісь Oz у напрямку переміщення коренеплоду на кут θ. Вектор рівнодійної $\overline{Q}_{пр.\theta}$ лежить у зазначеній площині і перетинає вісь Oz (рис. 1).

Очевидно, що вектори $\overline{Q}_{пр.\psi}$ і $\overline{Q}_{пр.\theta}$ напрямлені по нормалі до поверхні коренеплоду.

Обчислимо також величину сили $\overline{R}_z$ пружності ґрунту при переміщенні коренеплоду на величину вздовж осі Oz.

Сила $\overline{R}_z$ є рівнодійною розподіленого по поверхні контакту коренеплоду з нерозпушеним шаром ґрунту навантаження, причому вектори інтенсивності цього навантаження напрямлені паралельно осі Oz вниз. Отже, сила $\overline{R}_z$ лежить на осі Oz і напрямлена вниз.

Розглянемо, як і у попередніх випадках, елементарну площадку dF на поверхні контакту, що знаходиться на відстані z від точки закріплення O, площа dS якої визначається з виразу (29).

Очевидно, що на одиницю глибини закріплення h_1 припадає $\frac{dS}{h_1}$ частини площі елементарної площадки dF. Тоді, при переміщенні елементарної площадки dF на величину z_k вздовж осі Oz, зазнає деформації зсуву грунт площею, що дорівнює:

$$dS_{z_k} = \frac{dS}{h_1} \cdot z_k. \tag{40}$$

Таким чином, елементарне зусилля dR_z пружності ґрунту при переміщенні елементарної площадки dF на величину z_k буде дорівнювати:

$$dR_z = C \cdot dS_{z_k} = C \cdot \frac{dS}{h_1} \cdot z_k . \tag{41}$$

або, після підстановки виразу (40) у вираз (41), матимемо:

$$dR_z = \frac{C \cdot z \cdot \mathrm{tg}\varepsilon \cdot d\alpha \cdot dz}{h_1 \cdot \cos\varepsilon} . \tag{42}$$

Тоді рівнодійна R_z зазначеного розподіленого навантаження буде дорівнювати:

$$R_z = \int_0^{h_1} \int_0^{2\pi} \frac{C \cdot z \cdot \mathrm{tg}\varepsilon \cdot d\alpha \cdot dz}{h_1 \cdot \cos\varepsilon} . \tag{43}$$

Після інтегрування отримаємо:

$$R_z = \frac{C \cdot \pi \cdot h_1 \cdot \sin\varepsilon \cdot z_k}{\cos^2\varepsilon} . \tag{44}$$

Перейдемо далі до складання диференціальних рівнянь руху коренеплоду як твердого тіла при несиметричному захваті коренеплоду вібраційним викопуючим робочим органом. Оскільки захват коренеплоду відбувається з одного боку, то можна вважати, що точка O закріплення коренеплоду не зазнає переміщення, або воно настільки незначне, що ним можна знехтувати. Тоді коренеплід буде рухатись як тверде тіло з однією нерухомою точкою. Зазначений рух визначається зміною вище згаданих кутів Ейлера $\varphi,\ \psi$ і θ під дією розглянутих сил, що діють на коренеплід, і описується за допомогою динамічних і кінематичних рівнянь Ейлера [Погорелый и др. 1983]. Якщо рухома система координат $Oxyz$ вибрана таким чином, щоб координатні осі були головними осями інерції для точки O, то динамічні рівняння Ейлера мають наступний вигляд [Погорелый и др. 1983]:

$$\left.\begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \left(I_z - I_y\right)\omega_y\omega_z = M_x^e, \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \left(I_x - I_z\right)\omega_x\omega_z = M_y^e, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \left(I_y - I_x\right)\omega_x\omega_y = M_z^e, \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

де:

ω_x, ω_y і ω_z – проекції кутової швидкості коренеплоду при поворотах навколо миттєвої осі обертання на осі рухомої системи координат $Oxyz$;

I_x, I_y і I_z – моменти інерції коренеплоду відносно координатних осей Ox, Oy і Oz (головних осей інерції коренеплоду) відповідно;

M_x^e, M_y^e і M_z^e – головні моменти всіх зовнішніх сил, що діють на коренеплід відносно осей Ox, Oy і Oz відповідно.

Осі рухомої системи координат $Oxyz$, як показано на рис. 1, є головними осями інерції коренеплоду. Дійсно, вісь Oz є віссю матеріальної симетрії коренеплоду. Осі Ox і Oy лежать у площині, перпендикулярній до осі Oz. Згідно [Погорелый и др. 1983], якщо тіло має вісь матеріальної симетрії, то вона є головною віссю інерції тіла у всіх своїх точках. Дві інші головні осі, що проходять через будь-яку точку осі симетрії (в тому числі і точку O), лежать у площинах, перпендикулярних до цієї осі. Далі, для того, щоб виразити проекції кутової швидкості ω_x, ω_y і ω_z через кути Ейлера та їх похідні, необхідно до динамічних рівнянь Ейлера приєднати кінематичні рівняння Ейлера [Погорелый и др. 1983], які мають для нашого випадку наступний вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= -\dot{\psi}\sin\theta \cdot \sin\varphi - \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \omega_y &= -\dot{\psi}\sin\theta \cdot \cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

Таким чином, системи рівнянь (45) і (46) являють собою повну систему шести диференціальних рівнянь першого порядку для визначення кутів Ейлера як функцій часу.

Із силової схеми (рис. 1) визначаємо моменти усіх зовнішніх сил, що діють на коренеплід під час його захвату вібраційним викопуючим робочим органом відносно осей Ox, Oy і Oz. Після підстановки отриманих значень зазначених головних моментів у систему диференціальних рівнянь (45) отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь просторових коливань коренеплоду, закріпленому у ґрунті, у формі динамічних і кінематичних рівнянь Ейлера.

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left(\frac{347}{720}+\frac{3}{20}tg^2\varepsilon\right)m_k h_k^2\frac{d\omega_x}{dt}+\left(\frac{3}{20}tg^2\varepsilon+\frac{374}{720}\right)m_k h_k^2\omega_y\omega_z =\\
&=\Bigg[-P_1\left(h\,tg\varepsilon-h\theta\right)+f\left(\frac{H}{2}\cos\delta\sin\omega t+P_1\sin\gamma\right)\cos\left(\alpha_{K_1\max}\cdot\sin\omega t\right)\left(h\,tg\varepsilon-h\theta\right)-\\
&-\frac{C_1\,\pi h_1^4\sin\varepsilon\cdot\theta\cdot\psi\left(\cos(\varepsilon-\theta)+\cos(\varepsilon+\psi)\right)}{4\cos^3\varepsilon}\Bigg]\sin\theta\sin\varphi+\\
&+\Bigg[-\frac{1}{2}Hh\,tg\varepsilon\sin\omega t+hP_1\sin\psi-f\left(\frac{H}{2}\cos\delta\sin\omega t+P_1\sin\gamma\right)\times\\
&\times\cos\left(\alpha_{K_1\max}\cdot\sin\omega t\right)\cdot\sin\psi\cdot h-\frac{1}{3}G_k\,h_k\theta+\frac{C_1\cdot\pi\,h_1^4\sin\varepsilon\cdot\theta\cdot\cos\psi}{4\cos^3\varepsilon}\Bigg]\cos\varphi\,,\\
&\left(\frac{347}{720}+\frac{3}{20}tg^2\varepsilon\right)m_k h_k^2\frac{d\omega_y}{dt}+\left(\frac{347}{720}-\frac{3}{20}tg^2\varepsilon\right)m_k h_k^2\omega_z\omega_x =\\
&=\Bigg[-P_1\left(h\,tg\varepsilon-h\theta\right)+f\left(\frac{H}{2}\cos\delta\sin\omega t+P_1\sin\gamma\right)\cos\left(\alpha_{K_1\max}\cdot\sin\omega t\right)\left(h\,tg\varepsilon-h\theta\right)-\\
&-\frac{C_1\,\pi h_1^4\sin\varepsilon\cdot\theta\cdot\psi\left(\cos(\varepsilon-\theta)+\cos(\varepsilon+\psi)\right)}{4\cos^3\varepsilon}\Bigg]\sin\theta\cos\varphi-\\
&-\Bigg[-\frac{H}{2}h\,tg\varepsilon\cdot\sin\omega t+hP_1\sin\psi-f\left(\frac{H}{2}\cos\delta\sin\omega t+P_1\sin\gamma\right)\times\\
&\times\cos\left(\alpha_{K_1\max}\cdot\sin\omega t\right)\sin\psi\cdot h-\frac{1}{3}G_k\,h_k\theta+\frac{C_1\pi\,h_1^4\sin\varepsilon\cdot\theta\cdot\cos\psi}{4\cos^3\varepsilon}\Bigg]\sin\varphi\,,\\
&\frac{3}{10}m_k\,h_k^2 tg^2\varepsilon\frac{d\omega_z}{dt}=hP_1\cos\theta\cdot tg\varepsilon-f\left(\frac{H}{2}\cos\delta\sin\omega t+P_1\sin\gamma\right)\times\\
&\times\cos\left(\alpha_{K_1\max}\cdot\sin\omega t\right)\cos\theta\cdot tg\varepsilon\cdot h-\frac{C\,h_1^3\varphi\sin^2\varepsilon}{3\cos^3\varepsilon}+\\
&+\Bigg[P_1\left(h\,tg\varepsilon-h\theta\right)-f\left(\frac{H}{2}\cos\delta\sin\omega t+P_1\sin\gamma\right)\times\\
&\times\cos\left(\alpha_{K_1\max}\cdot\sin\omega t\right)\left(h\,tg\varepsilon-h\theta\right)+\frac{C_1\,\pi h_1^4\,\theta\psi\sin\varepsilon\,\left(\cos(\varepsilon-\theta)+\cos(\varepsilon+\psi)\right)}{4\cos^3\varepsilon}\Bigg]\cos\theta\,,\\
&\omega t\in\left[2k\pi,\ (2k+1)\pi\right],\quad k=0,1,2,\ldots\\
&\omega_x=-\dot{\psi}\sin\theta\cdot\sin\varphi-\dot{\theta}\cos\varphi,\\
&\omega_y=-\dot{\psi}\sin\theta\cdot\cos\varphi+\dot{\theta}\sin\varphi,\\
&\omega_z=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}.
\end{aligned}
\right\}\qquad (47)
$$

ВИСНОВОК

Таким чином, застосовуючи вихідні кінематичні і динамічні рівняння Ейлера складена системи диференціальних рівнянь коливання коренеплоду при вібраційному його викопуванні для випадку, коли коренеплід взаємодіє з одним клином вібраційного викопуючого робочого органу у одній його точці. Предметом наступного дослідження буде розглядання випадку коли коренеплід взаємодіє з обома клинами вібраційного викопуючого робочого органу.

ЛІТЕРАТУРА

Булгаков В.М., Головач І.В., Войтюк Д.Г. 2003: Теорія вібраційного викопування коренеплодів. Збірник наукових праць Національного аграрного університету. Механізація сільськогосподарського виробництва. Т. XIV, 34–86.

Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. 1971: Курс теоретической механики. Т. II Динамика. М.: Наука, 464 с.

Погорелый Л.В., Татьянко Н.В., Брей В.В. и др.; Под общ. ред. Погорелого Л.В. 1983: Свеклоуборочные машины (конструирование и расчет) К.: Техніка, 168 с.

RESEARCH ON THE PROCESS OF ROOT CROPS VIBRATING DIGGING OUT FROM SOIL ON THE BASIS OF THE EULER'S EQUATIONS

Summary. On the basis of an application of the Euler's equations a new mathematical model of root crops vibrational digging out from soil is developed. The obtained system of the differential equations generally allows to analytically investigate the indicated technological process most precisely.

Key words: Root crop, vibrating working body, mathematical model, power circuit, differential equations

Reviewer: Volodymyr Didukh, Prof. D. Sc.