

Stanisław Niziński, Krzysztof Ligier*

MODELE PROCESU EKSPLOATACJI POJAZDÓW MECHANICZNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono modele matematyczne, w których kryterium oceny efektywności funkcjonowania systemów eksploatacji jest stan techniczny obiektów i koszty eksploatacji. Do opracowania tych modeli wykorzystano procesy Markowa.

Słowa kluczowe: model matematyczny, proces rzeczywisty eksploatacji, obiekt techniczny

WPROWADZENIE

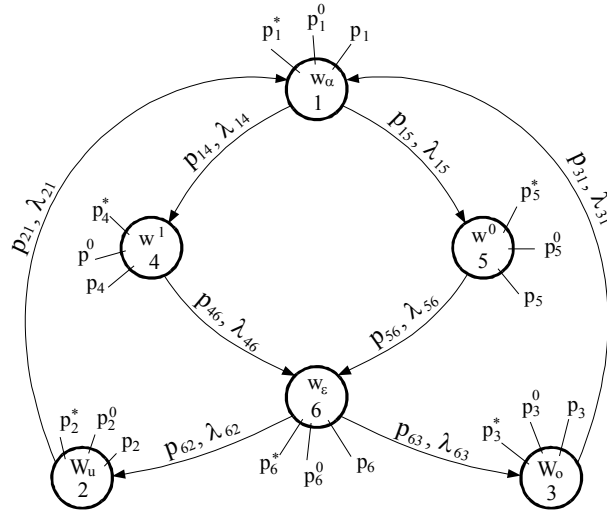
W systemie eksploatacji pojazdów mechanicznych zachodzą różnorodne procesy, a w tym: użytkowania, diagnozowania, obsługiwanie i zarządzania. Narzędziem doskonalenia funkcjonowania tych systemów są modele procesów eksploatacji, w szczególności modele matematyczne.

I WERSJA MODELU

Graf procesu eksploatacji

Pojazdy mechaniczne, które zostały poddane diagnozowaniu (stan w_α) z prawdopodobieństwami p_{14} i p_{15} są kierowane do odpowiednich stanów: zdadności w^1 i niezdatności w^0 . Wszystkie obiekty techniczne – zdadne (p_{46}) i niezdatne (p_{56}) są poddawane ocenie efektywności ich funkcjonowania (stan w_ϵ), w aspekcie ekonomicznym (koszty). Zdadne obiekty techniczne z prawdopodobieństwem p_{62} , które opłaca się użytkować są kierowane do podzbioru stanów W_u użytkowania, skąd po wykonaniu zadań są kierowane do stanu diagnozowania z prawdopodobieństwem p_{21} . Niezdatne obiekty techniczne, które opłaca się obsługiwać (np. naprawiać, regulować) z prawdopodobieństwem p_{63} są skierowane do podzbioru stanów W_o obsługiwanie, skąd trafiają ponownie do stanu w_α diagnozowania z prawdopodobieństwem p_{31} [1, 2].

* Prof. dr hab. inż. Stanisław Niziński, Krzysztof Ligier, Katedra Eksploatacji Pojazdów i Maszyn, Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie



Rys. 1. Graf procesu eksploatacji pojazdów mechanicznych, w którym wprowadzono stan oceny efektywności (koszty) – wersja I: w_α , w_w , w_o , w^1 , w^0 i w_ϵ – stany: diagnozowania, użytkowania, obsługiwanego, zdolności, niezdatności, oceny efektywności; p_1^* , p_1^0 , p_1 – prawdopodobieństwa graniczne przebywania obiektów w wyróżnionych stanach; p_{14} , p_{15} , ... – prawdopodobieństwa przejść procesu między wyróżnionymi stanami

Fig. 1. Graph of mechanical vehicles exploitation process in which the state of effectiveness of evaluation was introduced (costs) – Version I: w_α , w_w , w_o , w^1 , w^0 i w_ϵ – states: of diagnosis, of use, of servicing, of usability and unusability, of effectiveness evaluation; p_1^* , p_1^0 , p_1 – border probabilities of objects staying in the marked objects; p_{14} , p_{15} , ... – probabilities of the process passage between the marked states

Model dyskretny w stanach i czasie

Macierz prawdopodobieństw przejść procesu (rys. 1) ma postać:

$$P_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p_{14} & p_{15} & 0 \\ p_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{56} \\ 0 & p_{62} & p_{63} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Z macierzy (1) wynika, że:

$$\begin{aligned}
 p_{14} + p_{15} &= 1 \\
 p_{21} &= 1 \\
 p_{31} &= 1 \\
 p_{46} &= 1 \\
 p_{56} &= 1 \\
 p_{62} + p_{63} &= 1
 \end{aligned} \tag{2}$$

Równania stanów granicznych mają postać:

$$\begin{aligned}
 p_1^* &= p_{21}p_2^* + p_{31}p_3^* & p_2^* &= p_{62}p_6^* \\
 p_3^* &= p_{63}p_6^* & p_4^* &= p_{14}p_1^* \\
 p_5^* &= p_{15}p_1^* & p_6^* &= p_{46}p_4^* + p_{56}p_5^*
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* + p_5^* + p_6^* = 1 \tag{4}$$

Macierzowy układ równań:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & p_{62} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & p_{63} \\ p_{14} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ p_{15} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \\ p_5^* \\ p_6^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$A_C \cdot P_C = B_C \tag{6}$$

Rozwiązanie równań (6) określa wzór:

$$P_C = A_C^{-1} \cdot B_C \tag{7}$$

Prawdopodobieństwa graniczne stanów są następujące:

$$\begin{aligned}
 p_1^* &= \frac{1}{3} & p_2^* &= \frac{p_{62}}{3} \\
 p_3^* &= \frac{p_{63}}{3} & p_4^* &= \frac{p_{14}}{3} \\
 p_5^* &= \frac{p_{15}}{3} & p_6^* &= \frac{1}{3}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Model dyskretny w stanach i ciągły w czasie

Układ równań opisujących proces eksploatacji obiektów technicznych (rys. 1), w którym ruch obiektów między stanami jest scharakteryzowany intensywnością przejść $\lambda_{ij}(t)$ ma postać:

$$\begin{aligned}
 -\lambda_{14}p_1^0 - \lambda_{15}p_1^0 + \lambda_{21}p_2^0 + \lambda_{31}p_3^0 &= 0 \\
 -\lambda_{21}p_2^0 + \lambda_{62}p_6^0 &= 0 \\
 -\lambda_{31}p_3^0 + \lambda_{63}p_6^0 &= 0 \\
 -\lambda_{46}p_4^0 + \lambda_{14}p_1^0 &= 0 \\
 -\lambda_{56}p_5^0 + \lambda_{15}p_1^0 &= 0 \\
 -\lambda_{62}p_6^0 - \lambda_{63}p_6^0 + \lambda_{46}p_4^0 + \lambda_{56}p_5^0 &= 0 \\
 p_1^0 + p_2^0 + p_3^0 + p_4^0 + p_5^0 + p_6^0 &= 1
 \end{aligned} \tag{9}$$

W zapisie macierzowym układ równań (9) ma postać:

$$\begin{bmatrix}
 -\lambda_{14} - \lambda_{15} & \lambda_{21} & \lambda_{31} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\lambda_{21} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{62} \\
 0 & 0 & -\lambda_{31} & 0 & 0 & \lambda_{63} \\
 \lambda_{14} & 0 & 0 & -\lambda_{46} & 0 & -\lambda_{46} \\
 \lambda_{15} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{56} & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \\ p_3^0 \\ p_4^0 \\ p_5^0 \\ p_6^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Rozwiązanie układu równań (10) określa wartości prawdopodobieństw granicznych stanów:

$$\begin{aligned}
 P_D &= A_D^{-1} \cdot B_D \\
 P_D &= A_D^{-1} \cdot B_D
 \end{aligned} \tag{11}$$

Model semi-Markowa

Wartości prawdopodobieństw stanów granicznych opisują wzory:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{E(T_1)}{E(T_1) + p_{62}E(T_2) + p_{63}E(T_3) + p_{14}E(T_4) + p_{15}E(T_5) + E(T_6)} \\
 p_2 &= \frac{p_{62}E(T_2)}{A_\alpha} \\
 p_3 &= \frac{p_{63}E(T_3)}{A_\alpha} \\
 p_4 &= \frac{p_{14}E(T_4)}{A_\alpha} \\
 p_5 &= \frac{p_{15}E(T_5)}{A_\alpha} \\
 p_6 &= \frac{E(T_6)}{A_\alpha}
 \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie:

$$A_\alpha = E(T_1) + p_{62}E(T_2) + p_{63}E(T_3) + p_{14}E(T_4) + p_{15}E(T_5) + E(T_6)$$

$E(T_1), E(T_2), \dots, E(T_6)$ – wartości oczekiwane czasów przebywania obiektów w wyróżnionych stanach.

Prawdopodobieństwa graniczne (12) mają następującą interpretację:

- p_1 – współczynnik określający zbiór diagnozowanych obiektów technicznych;
- p_2 – współczynnik określający zbiór zdatnych obiektów technicznych, które opłaca się użytkować;
- p_3 – współczynnik charakteryzujący frakcję niezdatnych obiektów, które opłaca się obsługiwać;
- p_4 – współczynnik oczekiwania użytkowania charakteryzujący zbiór zdatnych obiektów, oczekujących na ocenę efektywności funkcjonowania;
- p_5 – współczynnik oczekiwania obsługi charakteryzujący zbiór niezdatnych obiektów, oczekujących na ocenę efektywności obsługi;
- p_6 – współczynnik charakteryzujący zbiór ocenianych pod względem efektywności obiektów technicznych.

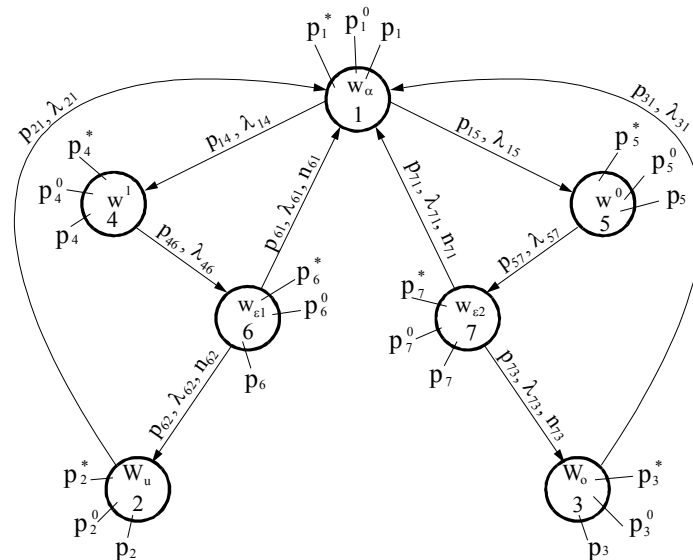
Z grafu 1 i opisu interpretacji prawdopodobieństw granicznych wynika, że nie uwzględniono zdatnych obiektów technicznych i niezdatnych obiektów technicznych, których nie opłaca się eksploatować i należy wyprowadzić je z systemu eksploatacji, co przedstawiono na rys. 2. Podkreślić należy, że dla grafu z rys. 1, $p_2 + p_4 \neq K_{gt}$ (współczynnik gotowości technicznej obiektów), ponieważ nie uwzględniono zdatnych obiektów, których nie opłaca się użytkować w danym systemie eksploatacji.

II WERSJA MODELU

Graf procesu eksploatacji

Graf procesu eksploatacji przedstawiono na rys. 2. W grafie stan w_e oceny efektywności rozdzielono na dwa stany: w_{el} – stan oceny jakości funkcjonowania zdatnych po-

jazdów mechanicznych i stan w_{e2} – oceny efektywności obsługiwanego pojazdów niezdatnych.



Rys. 2. Graf II wersji procesu eksploatacji pojazdów mechanicznych, (oznaczenia w tekście)

Fig. 2. Graph of mechanical vehicles exploitation process Version II (symbols as in Fig. 1.)

Obiekty techniczne, które zostały poddane diagnozowaniu (stan w_e) z prawdopodobieństwem p_{14} i p_{15} są kierowane do stanu w^1 zdadności i stanu w^0 niezdatności. Jest to pierwsza selekcja obiektów, w której kryterium oceny efektywności funkcjonowania jest ich stan techniczny.

Zdatne pojazdy mechaniczne ze stanu w^1 przechodzą do stanu w_{e1} , w którym podlegają drugiej selekcji, której kryterium jest efektywność (koszty) ich funkcjonowania. Obiekty te dzielone są na dwa strumienie. Pierwszy strumień z prawdopodobieństwem p_{62} jest kierowany do zbioru stanów W_u użytkowania. Zatem są to zdatne obiekty techniczne, które opłaca się użytkować. Po zrealizowaniu zadań obiekty z prawdopodobieństwem p_{21} są kierowane do stanu w_α ich diagnozowania. Drugi strumień obiektów z podobieństwem p_{61} płynie do stanu w_α . W strumieniu tym znajdują się zdatne obiekty techniczne, które nie opłaca się użytkować i należy wyprowadzić je z podsystemu eksploatacji w danym systemie gospodarczym.

Niezdatne obiekty techniczne z prawdopodobieństwem p_{57} są kierowane do stanu w_{e2} oceny efektywności ich obsługiwanego (np. naprawy), w którym również są rozdzielone na dwa strumienie.

Pierwszy strumień obiektów z prawdopodobieństwem p_{72} jest kierowany do stanów W_o obsługiwanego. W strumieniu tym znajdują się niezdatne obiekty techniczne, które opłaca się obsługiwać. Drugi strumień dotyczy obiektów niezdatnych, których nie opłaca się obsługiwać. Obiekty te z prawdopodobieństwem p_{71} są kierowane do stanu w_α , skąd są odprowadzone poza system eksploatacji obiektów.

Z przedstawionego opisu wynika jednoznaczność ruchu obiektów technicznych w grafie, na podstawie którego powinien funkcjonować system ich eksploatacji. Z liczby

$N = n_{62} + n_{61} + n_{72} + n_{71}$ obiektów znajdujących się w systemie, n_{62} jest zdalnych i użytkowanych, n_{61} zdalnych urządzeń nie opłaca się użytkować, n_{72} niezdatnych urządzeń podlega obsłudze, natomiast n_{71} niezdatnych urządzeń nie opłaca się obsługiwać. Poza system eksploatacji należy wyprowadzić $n_w = n_{61} + n_{71}$ obiektów technicznych i uzupełnić nowymi obiektami [1, 2].

Model dyskretny w stanach i czasie

Macierz prawdopodobieństw przejść procesu eksploatacji obiektów technicznych ma postać (rys. 2):

$$P_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p_{14} & p_{15} & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{57} \\ p_{61} & p_{62} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{71} & 0 & p_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Z macierzy (13) wynika, że:

$$\begin{aligned} p_{14} + p_{15} &= 0 \\ p_{21} &= 1 \\ p_{31} &= 1 \\ p_{46} &= 1 \\ p_{57} &= 1 \\ p_{61} + p_{62} &= 1 \\ p_{71} + p_{73} &= 1 \end{aligned} \quad (14)$$

Graf (rys. 2) można opisać układem równań:

$$\begin{aligned} p_1^* &= p_{21}p_2^* + p_{31}p_3^* + p_{61}p_6^* + p_{71}p_7^* \\ p_2^* &= p_{62}p_6^* \\ p_3^* &= p_{73}p_7^* \\ p_4^* &= p_{14}p_1^* \\ p_5^* &= p_{15}p_1^* \\ p_6^* &= p_{46}p_4^* \\ p_7^* &= p_{57}p_5^* \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* + p_5^* + p_6^* + p_7^* &= 1 \end{aligned} \quad (15)$$

Macierzowy układ równań:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & p_{61} & p_{71} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & p_{62} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & p_{73} \\ p_{14} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{15} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \\ p_5^* \\ p_6^* \\ p_7^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$A_F \cdot P_F = B_F \quad (17)$$

Rozwiązanie równań (17) określa wzór (18), z którego uzyskuje się wartość prawdopodobieństw $p_1^*, p_2^*, \dots, p_7^*$ granicznych wyróżnionych stanów:

$$P_F = A_F^{-1} \cdot B_F \quad (18)$$

Model dyskretny w stanach i ciągły w czasie

Układ równań stanowiących model, w którym przejścia obiektów charakteryzują intensywności przejść $\lambda_{ij}(t)$ ma postać:

$$\begin{aligned} -\lambda_{14}p_1^0 - \lambda_{15}p_1^0 + \lambda_{21}p_2^0 + \lambda_{31}p_3^0 + \lambda_{61}p_6^0 + \lambda_{71}p_7^0 &= 0 \\ -\lambda_{21}p_2^0 + \lambda_{62}p_6^0 &= 0 \\ -\lambda_{31}p_3^0 + \lambda_{73}p_7^0 &= 0 \\ -\lambda_{46}p_4^0 + \lambda_{14}p_1^0 &= 0 \\ -\lambda_{57}p_5^0 + \lambda_{15}p_1^0 &= 0 \\ -\lambda_{62}p_6^0 + \lambda_{46}p_4^0 &= 0 \\ -\lambda_{73}p_7^0 + \lambda_{57}p_5^0 &= 0 \\ p_1^0 + p_2^0 + p_3^0 + p_4^0 + p_5^0 + p_6^0 + p_7^0 &= 1 \end{aligned} \quad (19)$$

W zapisie macierzowym układ równań (19) ma postać:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_{14} - \lambda_{15} & \lambda_{21} & \lambda_{31} & 0 & 0 & \lambda_{61} & \lambda_{71} \\ 0 & -\lambda_{21} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{62} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{31} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{73} \\ \lambda_{14} & 0 & 0 & -\lambda_{46} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{15} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{57} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{46} & 0 & -\lambda_{62} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \\ p_3^0 \\ p_4^0 \\ p_5^0 \\ p_6^0 \\ p_7^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Rozwiązanie układu równań (20) określa wartość prawdopodobieństw $p_1^0, p_2^0, \dots, p_7^0$ granicznych wyróżnionych stanów:

$$P_G = A_G^{-1} \cdot B_G \quad (21)$$

Model semi-Markowa

Wartości prawdopodobieństw stanów granicznych wynoszą:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{p_1^* E(T_1)}{A_\beta} & p_2 &= \frac{p_2^* E(T_2)}{A_\beta} \\ p_3 &= \frac{p_3^* E(T_3)}{A_\beta} & p_4 &= \frac{p_4^* E(T_4)}{A_\beta} \\ p_5 &= \frac{p_5^* E(T_5)}{A_\beta} & p_6 &= \frac{p_6^* E(T_6)}{A_\beta} \\ p_7 &= \frac{p_7^* E(T_7)}{A_\beta} \end{aligned} \quad (22)$$

gdzie:

$E(T_1), E(T_2), \dots$ – wartości oczekiwane czasów przebywania obiektów w wyróżnionych stanach;

$$A_\beta = p_1^* E(T_1) + p_2^* E(T_2) + p_3^* E(T_3) + p_4^* E(T_4) + p_5^* E(T_5) + p_6^* E(T_6) + p_7^* E(T_7).$$

Prawdopodobieństwa graniczne (22) mają interpretację:

- p_1 – współczynnik określający zbiór diagnozowanych obiektów technicznych;
- p_2 – współczynnik określający zbiór zdatnych obiektów technicznych, które opłaca się użytkować;
- p_3 – współczynnik charakteryzujący frakcję niezdatnych obiektów technicznych, które opłaca się obsługiwać;
- p_4 – współczynnik oczekiwania użytkownika charakteryzujący zbiór zdatnych obiektów technicznych, oczekujących na ocenę efektywności funkcjonowania;
- p_5 – współczynnik oczekiwania obsługiwanego, charakteryzujący zbiór niezdatnych obiektów technicznych, oczekujących na ocenę efektywności obsługiwanego;
- p_6 – współczynnik charakteryzujący zbiór zdatnych obiektów technicznych ocenianych pod względem opłacalności użytkowania;
- p_7 – współczynnik charakteryzujący zbiór niezdatnych obiektów technicznych ocenianych w aspekcie opłacalności obsługiwanego.

Współczynnik gotowości technicznej obiektów jest opisany wyrażeniem:

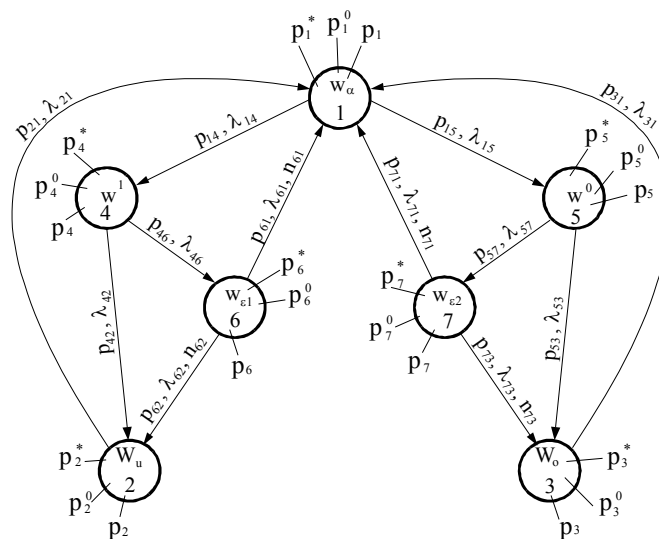
$$K_{gt} = p_2 + p_4 + p_6.$$

III WERSJA MODELU

Graf procesu eksploatacji

Do grafu procesu eksploatacji pojazdów mechanicznych przedstawionego na rys. 2 wprowadzono dwie zmiany – rys. 3. Pierwsza zmiana dotyczy przejścia obiektów ze stanu 4 do stanu 2 z prawdopodobieństwem p_{42} . Uzasadnienie częściowego ruchu obiektów technicznych tą drogą jest następujące. Efektywność ekonomiczna systemu eksploatacji obiektów technicznych zależy od jakości funkcjonowania wszystkich urządzeń technicznych. Niektóre obiekty techniczne nie mogą funkcjonować ekonomicznie, tzn. przynosić dochodu, jednak ich obecność jest niezbędna do zapewnienia prawidłowego działania systemu eksploatacji jako całości. W związku z tym część zdalnych obiektów pomija stan 6 oceny opłacalności ich użytkowania i bezpośrednio przechodzi do realizacji zadań w stanie 2.

Druga zmiana dotyczy przejścia obiektów ze stanu 5 do stanu 3, z pominięciem stanu 7 oceny opłacalności obsługi, z prawdopodobieństwem p_{53} . Jest to uzasadnione tym, że niektóre urządzenia techniczne, których nie opłaca się obsługiwać, muszą być obsługiwane, ponieważ ich obecność gwarantuje ciągłości funkcjonowania systemu. Podkreślić należy, że system eksploatacji pojazdów mechanicznych jako całość nie może generować strat [1, 2].



Rys. 3. Graf III wersji procesu eksploatacji pojazdów mechanicznych [1]

Fig. 2. Graph of mechanical vehicles exploitation process Version III (symbols as in Fig. 1.)

Model dyskretny w stanach i czasie

Macierz prawdopodobieństwa przejść procesu eksploatacji obiektów technicznych ma postać (rys. 3):

$$P_{ad} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p_{14} & p_{15} & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{42} & 0 & 0 & 0 & p_{46} & 0 \\ 0 & 0 & p_{53} & 0 & 0 & 0 & p_{57} \\ p_{61} & p_{62} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{71} & 0 & p_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Z macierzy (23) wynika, że:

$$\begin{aligned} p_{14} + p_{15} &= 1 \\ p_{21} &= 1 \\ p_{31} &= 1 \\ p_{42} + p_{46} &= 1 \\ p_{53} + p_{57} &= 1 \\ p_{61} + p_{62} &= 1 \\ p_{71} + p_{73} &= 1 \end{aligned} \quad (24)$$

Równania stanów granicznych mają postać:

$$\begin{aligned} p_1^* &= p_{21}p_2^* + p_{31}p_3^* + p_{61}p_6^* + p_{71}p_7^* \\ p_2^* &= p_{42}p_4^* + p_{62}p_6^* \\ p_3^* &= p_{53}p_5^* + p_{73}p_7^* \\ p_4^* &= p_{14}p_1^* \\ p_5^* &= p_{15}p_1^* \\ p_6^* &= p_{46}p_4^* \\ p_7^* &= p_{57}p_5^* \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* + p_5^* + p_6^* + p_7^* &= 1 \end{aligned} \quad (25)$$

Macierzowy układ równań:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & p_{61} & p_{71} \\ 0 & -1 & 0 & p_{42} & 0 & p_{62} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & p_{53} & 0 & p_{73} \\ p_{14} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{15} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{46} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \\ p_5^* \\ p_6^* \\ p_7^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$A_H \cdot P_H = B_H \quad (27)$$

Ze wzoru

$$P_H = A_H^{-1} \cdot B_H \quad (28)$$

otrzymujemy wartości $p_1^*, p_2^*, \dots, p_7^*$ prawdopodobieństw granicznych stanów.

Model dyskretny w stanach i ciągle w czasie

Układ równań (rys. 3) ma postać:

$$\begin{aligned} -\lambda_{14}p_1^0 - \lambda_{15}p_1^0 + \lambda_{21}p_2^0 + \lambda_{31}p_3^0 + \lambda_{61}p_6^0 + \lambda_{71}p_7^0 &= 0 \\ -\lambda_{21}p_2^0 + \lambda_{42}p_4^0 + \lambda_{62}p_6^0 &= 0 \\ -\lambda_{31}p_3^0 + \lambda_{53}p_5^0 + \lambda_{73}p_7^0 &= 0 \\ -\lambda_{42}p_4^0 - \lambda_{46}p_4^0 + \lambda_{14}p_1^0 &= 0 \\ -\lambda_{53}p_5^0 - \lambda_{57}p_5^0 + \lambda_{15}p_1^0 &= 0 \\ -\lambda_{61}p_6^0 - \lambda_{62}p_6^0 + \lambda_{46}p_4^0 &= 0 \\ -\lambda_{71}p_7^0 - \lambda_{73}p_7^0 + \lambda_{57}p_5^0 &= 0 \\ p_1^0 + p_2^0 + p_3^0 + p_4^0 + p_5^0 + p_6^0 + p_7^0 &= 1 \end{aligned} \quad (29)$$

W zapisie macierzowym układ równań (29) ma postać:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_{14} - \lambda_{15} & \lambda_{21} & \lambda_{31} & 0 & 0 & \lambda_{61} & \lambda_{71} \\ 0 & -\lambda_{21} & 0 & \lambda_{42} & 0 & \lambda_{62} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{31} & 0 & \lambda_{53} & 0 & \lambda_{73} \\ \lambda_{14} & 0 & 0 & -\lambda_{42} - \lambda_{46} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{15} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{53} - \lambda_{57} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{46} & 0 & -\lambda_{61} - \lambda_{62} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \\ p_3^0 \\ p_4^0 \\ p_5^0 \\ p_6^0 \\ p_7^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Prawdopodobieństwa graniczne wyróżnionych stanów obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned} P_I &= A_I^{-1} \cdot B_I \\ P_I &= A_I^{-1} \cdot B_I \end{aligned} \quad (31)$$

Model semi-Markowa

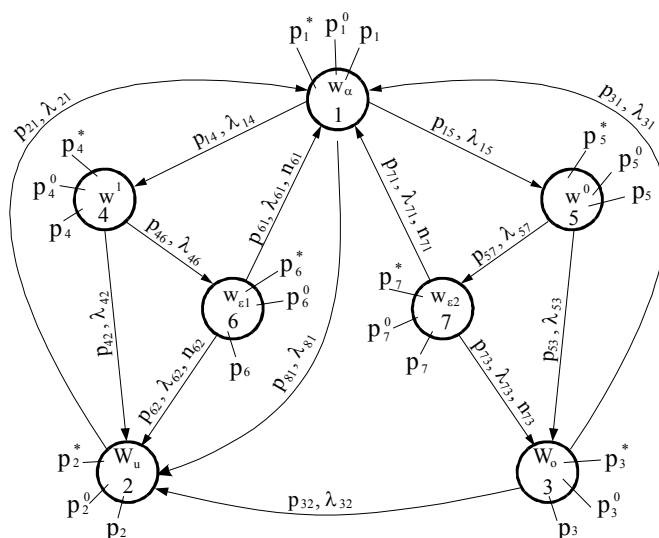
Model ten jest opisany układem równań (22), z tym, że wartości prawdopodobieństw granicznych włożonego procesu Markowa obliczamy z wzoru (28).

Prawdopodobieństwa graniczne wyróżnionych stanów mają taką samą interpretację jak w wersji II modelu, z tym że przyjmują inne wartości.

MODEL Z ZAKŁÓCENIAMI

Graf procesu

W przypadkach szczególnych istnieje konieczność wykorzystania częściowo niezdatnych obiektów technicznych do realizacji zadań. Dotyczy to może sytuacji, w których zagrożone jest bezpieczeństwo ludzi, na przykład w czasie klęsk żywiołowych (powódź, wichury, opady śnieżne). W związku z tym do grafu procesu eksploatacji obiektów technicznych przedstawionym na rys. 3 wprowadzono następujące zmiany – rys. 4. Istnieje możliwość przejścia obiektów technicznych ze stanu 1 bezpośrednio do stanu 2, a także częściowo niezdatnych obiektów technicznych ze stanu 3 do stanu 2 [1, 2].



Rys. 4. Graf procesu eksploatacji obiektów technicznych z zakłóceniami

Fig. 4. Graph of exploitation process of technical objects with interferences

Model dyskretny w stanach i czasie

Macierz prawdopodobieństw przejść procesu eksploatacji obiektów technicznych ma postać (rys. 4):

$$P_{\alpha E} = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & 0 & p_{14} & p_{15} & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{42} & 0 & 0 & 0 & p_{46} & 0 \\ 0 & 0 & p_{53} & 0 & 0 & 0 & p_{57} \\ p_{61} & p_{62} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{71} & 0 & p_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Z macierzy (32) wynika, że:

$$\begin{aligned} p_{12} + p_{14} + p_{15} &= 1 \\ p_{21} &= 1 \\ p_{31} + p_{32} &= 1 \\ p_{42} + p_{46} &= 1 \\ p_{53} + p_{57} &= 1 \\ p_{61} + p_{62} &= 1 \\ p_{71} + p_{73} &= 1 \end{aligned} \quad (33)$$

Biorąc pod uwagę graf (rys. 4), równania stanów granicznych mają postać:

$$\begin{aligned} p_1^* &= p_{21}p_2^* + p_{31}p_3^* + p_{61}p_6^* + p_{71}p_7^* \\ p_2^* &= p_{12}p_1^* + p_{32}p_3^* + p_{42}p_4^* + p_{62}p_6^* \\ p_3^* &= p_{53}p_5^* + p_{73}p_7^* \\ p_4^* &= p_{14}p_1^* \\ p_5^* &= p_{15}p_1^* \\ p_6^* &= p_{46}p_4^* \\ p_7^* &= p_{57}p_5^* \\ p_1^0 + p_2^0 + p_3^0 + p_4^0 + p_5^0 + p_6^0 + p_7^0 &= 1 \end{aligned} \quad (34)$$

Równania stanów granicznych w układzie macierzowym mają postać:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & p_{31} & 0 & 0 & p_{61} & p_{71} \\ p_{12} & -1 & p_{32} & p_{42} & 0 & p_{62} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & p_{53} & 0 & p_{73} \\ p_{14} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{15} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{46} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \\ p_5^* \\ p_6^* \\ p_7^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$A_J = P_J \cdot B_J \quad (36)$$

Wartości prawdopodobieństw $p_1^*, p_2^*, \dots, p_7^*$ otrzymujemy z równania:

$$P_J = A_J^{-1} \cdot B_J \quad (37)$$

Model dyskretny w stanach i ciągle w czasie

Układ równań (rys. 4) ma postać:

$$\begin{aligned}
 (-\lambda_{12} - \lambda_{14} - \lambda_{15})p_1^0 + \lambda_{21}p_2^0 + \lambda_{31}p_3^0 + \lambda_{61}p_6^0 + \lambda_{71}p_7^0 &= 0 \\
 -\lambda_{21}p_2^0 + \lambda_{12}p_1^0 + \lambda_{32}p_3^0 + \lambda_{42}p_4^0 + \lambda_{62}p_6^0 &= 0 \\
 (-\lambda_{31} - \lambda_{32})p_3^0 + \lambda_{53}p_5^0 + \lambda_{73}p_7^0 &= 0 \\
 (-\lambda_{42} - \lambda_{46})p_4^0 + \lambda_{14}p_1^0 &= 0 \\
 (-\lambda_{53} - \lambda_{57})p_5^0 + \lambda_{15}p_1^0 &= 0 \\
 (-\lambda_{61} - \lambda_{62})p_6^0 + \lambda_{46}p_4^0 &= 0 \\
 (-\lambda_{71} - \lambda_{73})p_7^0 + \lambda_{57}p_5^0 &= 0 \\
 p_1^0 + p_2^0 + p_3^0 + p_4^0 + p_5^0 + p_6^0 + p_7^0 &= 1
 \end{aligned} \quad (38)$$

W zapisie macierzowym układ równań (38) ma postać:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_{12} - \lambda_{14} - \lambda_{15} & \lambda_{21} & \lambda_{31} & 0 & 0 & \lambda_{61} & \lambda_{71} \\ \lambda_{12} & -\lambda_{21} & \lambda_{32} & \lambda_{42} & 0 & \lambda_{62} & 0 \\ 0 & -\lambda_{31} - \lambda_{32} & 0 & 0 & \lambda_{53} & 0 & \lambda_{73} \\ \lambda_{14} & 0 & 0 & -\lambda_{42} - \lambda_{46} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{15} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{53} - \lambda_{57} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{46} & 0 & -\lambda_{61} - \lambda_{62} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \\ p_3^0 \\ p_4^0 \\ p_5^0 \\ p_6^0 \\ p_7^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Prawdopodobieństwa graniczne wyróżnionych stanów obliczamy z wzoru:

$$P_J = A_J^{-1} \cdot B_J \quad (40)$$

Model semi-Markowa

Model jest opisany układem równań (22), z tym, że wartości prawdopodobieństw granicznych włożonego łańcucha Markowa obliczamy ze wzoru (37). Prawdopodobieństwa graniczne wyróżnionych stanów mają taką samą interpretację jak w punkcie II wersji modelu z wyjątkiem prawdopodobieństwa p_2 , które oznacza współczynnik użytkowania zdalnych i częściowo niezdatnych obiektów technicznych.

PODSUMOWANIE

- Reasumując rozważania dotyczące modeli matematycznych można stwierdzić:
- pierwszym modelem matematycznym uwzględniającym stan oceny efektywności jest model, w którym kryterium tej oceny jest stan techniczny pojazdów mechanicznych;
 - lepiej odzwierciedlającym rzeczywisty proces eksploatacji obiektów technicznych jest model, w którym kryterium oceny efektywności jest stan techniczny i koszty – wersja I, a w szczególności wersja II, a także wersja III;
 - w szczególnych przypadkach, np. klęsk żywiołowych, procesy eksploatacji pojazdów mechanicznych mogą być opisane modelami matematycznymi z zakłóceniami.

PIŚMIENNICTWO

1. Niziński S., 2002: Eksploatacja obiektów technicznych. ITE, Radom.
2. Niziński S., Żółtowski B., 2002: Modelowanie procesów eksploatacji maszyn. MAKAR BŻ. Bydgoszcz-Sulejówek.

MODELS OF VEHICLE OPERATING PROCESS

Summary. Mathematical models of vehicle operating processes has been shown, in which the technical state of objects and operating costs were used as effectiveness evaluation criterion of costs of operating systems of machines. The Markov's chain method was used in developing the models.

Keywords: mathematical model, real exploitation process, technical object.

Recenzent: Prof. dr hab. Zbigniew Burski