

Volodymyr Bulgakov, \*, Janusz Nowak, Wojciech Przystupa\*\*

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ САМОХОДНОГО КОРНЕУБОРОЧНОГО КОМБАИНА

**Аннотация.** На примере самоходной корнеуборочной машины приведена методика построения расчетной модели плоскопараллельного движения самоходного машинного агрегата. При этом в качестве исходных приняты уравнения в форме Лагранжа 2-го рода. По результатам численного решения полученной системы дифференциальных уравнений на ЭВМ определены динамические характеристики корнеуборочной машины. Полученные зависимости могут быть применены при теоретическом исследовании других мобильных машинных агрегатов.

**Ключевые слова:** математическая модель, корнеуборочная машина, плоскопараллельное движение

### ВВЕДЕНИЕ

Качественные показатели работы большинства мобильных машинных агрегатов в значительной степени определяются характером их плоскопараллельного движения. Это относится, прежде всего к самоходным корнеуборочным машинам, выполняющим технологический процесс уборки при движении по рядкам корнеплодов свеклы. Отклонение рабочих органов от оси рядка всего на 10–12 мм приводит к потерям и повреждениям корнеплодов сахарной свеклы, достигающим более 20% [1]. Это обстоятельство касается уборочных и других машинных агрегатов, выполняющих технологический процесс при движении по фиксированным траекториям.

Поэтому необходимо, чтобы самоходные машинные агрегаты двигались в горизонтальной плоскости с высокой степенью точности. Такое движение определяется не только поступательной скоростью, но и конструктивными параметрами их ходовых систем, типом выкапывающих рабочих органов и их размещением относительно опорных колес, использованием различных типов рулевых механизмов, автомата вождения и т.д. Чтобы определить степень влияния

---

\* Prof. dr Volodymyr Bulgakov, Gosudarstvienny Agramny Universytet, Ukraina

\*\* Dr hab. Janusz Nowak, dr Wojciech Przystupa, Akademia Rolnicza w Lublinie, Polska

указанных параметров на плоскопараллельное движение самоходной корнеуборочной машины, нами построена ее расчетная математическая модель.

### СХЕМА КОРНЕУБОРОЧНОЙ МАШИНЫ

Первым этапом исследования стало построение эквивалентной схемы самоходной корнеуборочной машины, представленной на рис. 1, включающей элементы ходовой системы машины, копирующие колеса и выкапывающие рабочие органы. Движение рассматривается относительно неподвижных декартовых координат  $OXYZ$ , при этом оси  $OX$  и  $OY$  образуют горизонтальную плоскость поверхности поля, а ось  $OZ$  направлена вертикально вверх. Допускаем, что при движении по поверхности поля все точки ходовой системы и рабочих органов корнеуборочной машины перемещаются только в плоскостях, параллельных плоскости  $OXY$ . Центр масс корнеуборочной машины обозначим через  $B$ , полюс (то есть некоторую фиксированную на корпусе машины точку, расположенную на ее продольной оси) – через  $C$ . Подвижную систему декартовых координат  $C\xi\eta\zeta$  жестко свяжем с корпусом машины, постоянно связанную с ним. При этом ось  $C\zeta$  направлена вертикально вверх, ось  $C\xi$  совпадает с продольной осью машины, ось  $C\eta$  параллельна оси ведущих колес и направлена влево от направления движения.

Обозначим середины межосевых расстояний между передними управляемыми и задними ведущими колесами соответственно точками  $A$  и  $D$ ; центры масс этих колес – точками  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$ ,  $B_{22}$ ; точку пересечения оси подвеса выкапывающих секций и продольной оси машины обозначим через  $N$ . В точке  $A$  шарнирно установлена рамка копирующих колес.

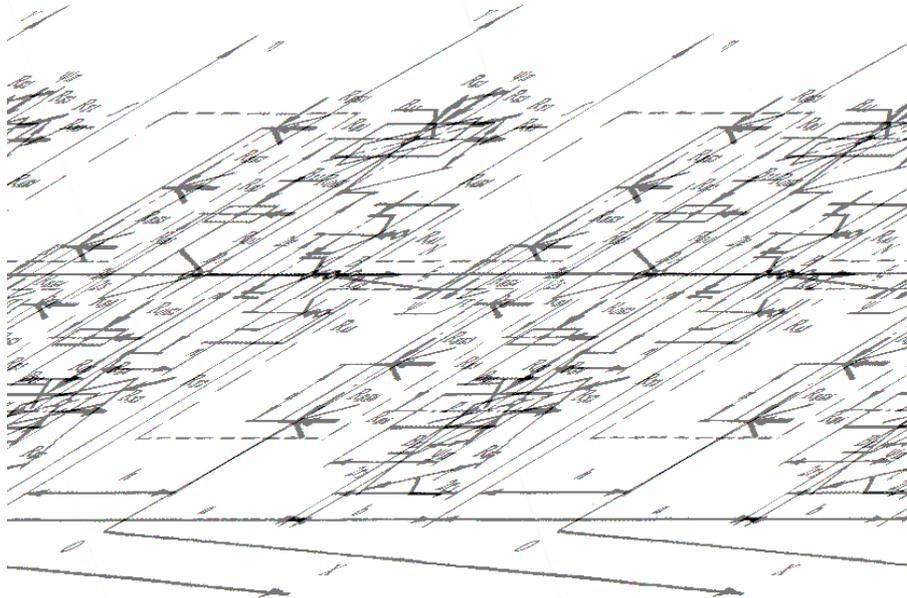


Рис. 1. Схема плоскопараллельного движения самоходного машинного агрегата в горизонтальной плоскости.

Fig. 1. The schema of flat parallel movement of root harvester

Обозначим на схеме также такие расстояния: от центра масс  $B$  до оси переднего моста –  $AB = a$ , заднего моста –  $DB = b$ , от полюса  $C$  до оси заднего моста –  $DC = l$ , от центра масс  $B$  до оси подвеса выкапывающих секций –  $BK = h$ , от оси переднего моста до оси копирующих колес –  $p$ , от оси переднего моста до оси копиров –  $n$ . Расстояние между точками подвеса крайних копиров выразим через  $m$ , между осями поворотов управляемых колес –  $2e$ , между осями симметрии соседних выкапывающих рабочих органов –  $u$ , длину поворотных цапф рулевого механизма –  $f$ , диаметры управляемых и ведущих колес – соответственно  $2r_1$  и  $2r_2$ , ширину колеи ведущих и копирующих колес –  $2d$  и  $2s$ , продольную базу машины –  $AD = a + b$ .

Характер движения корнеуборочной машины в рассматриваемой плоскости обуславливается значениями реакций почвы на колесах ходовой и копирующей систем, суммарного сопротивления на выкапывающих рабочих органах, а также сопротивлений, которые возникают на других рабочих органах. Обозначим реакции почвы, действующие на ходовые колеса: управляемые –  $R_{y1}$  и  $R_{y2}$ , ведущие –  $R_{x1}$  и  $R_{x2}$ , копирующие –  $R_{O1}$  и  $R_{O2}$ , на копиры автомата вождения –  $R_{A1}$ ,  $R_{A2}$ , и  $R_{A3}$ ; суммарные реакции сопротивления при движении выкапывающих рабочих органов в почве –  $R_{B1}, R_{B2} \dots R_{B6}$ ; боковые реакции почвы, действующие на управляемые и ведущие колеса корнеуборочной машины при движении вдоль оси  $Y$  –  $R_{B1}, R_{B3}, R_{B3}, R_{B4}$ , на копирующие колеса –  $R_{OB1}$ ,

$R_{OB2}$ ; боковые реакции почвы на выкапывающие рабочие органы –  $R_{BB1}$ ,  $R_{BB2}$ , ...,  $R_{BB6}$ , на датчики–копиры –  $R_{AB1}$ ,  $R_{AB2}$ ,  $R_{AB3}$ .

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ КОРНЕУБОРОЧНОЙ МАШИНЫ

Положение машины в рассматриваемой плоскости  $OXY$  в общем виде будет определяться координатами  $X$  и  $Y$  точки  $C$  и курсовым углом  $\psi$ , отсчитываемым от оси  $OX$  до оси  $C\xi$  [2]. Ориентация осей левого и правого управляемых колес относительно корпуса машины определяется углами  $\psi_L$  и  $\psi_P$ . Указанные координаты можно принять в качестве обобщенных координат рассматриваемой динамической системы.

Для составления дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения корнеуборочной машины наиболее удобно использовать уравнения динамики в форме Лагранжа 2-го рода [3]:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (1)$$

где:  $T$  – кинетическая энергия системы,  $q$  – обобщенные координаты,  $Q_i$  – обобщенные силы.

Выразим значения величин, входящих в выражение (1). Для определения кинетической энергии  $T$  рассматриваемой системы необходимо установить кинематические элементы движения корнеуборочной машины и, прежде всего, скорости приведенных центров масс ее корпуса.

Воспользуемся значениями скорости центра масс корнеуборочной машины, полученными в работе [4]:

$$V_B^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + 2(b-l)\dot{\psi}(-\dot{X} \sin \psi + \dot{Y} \cos \psi) + (b-l)\dot{\psi}^2. \quad (2)$$

Кинетическая энергия всей корнеуборочной машины будет равна:

$$T = T_1 + T_2, \quad (3)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  – кинетическая энергия соответственно поступательного движения корнеуборочной машины и ее вращения вокруг полюса  $C$ .

Составляющие выражения (3) определяются такими соотношениями:

$$T_1 = \frac{1}{2} M V_B^2 = \frac{1}{2} M [ \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + 2(b-l)\dot{\psi}(-\dot{X} \sin \psi + \dot{Y} \cos \psi) + (b-l)\dot{\psi}^2 ] \quad (4)$$

где  $M$  – масса корнеуборочной машины,  $V_B$  – скорость ее центра масс;

$$T_2 = \frac{1}{2} J_M \dot{\psi}^2 \quad (5)$$

где  $J_M$  – момент инерции корнеуборочной машины относительно вертикальной оси  $C\xi$ ;  $\dot{\psi}$  – угловая скорость вращения машины вокруг полюса  $C$ .

После подстановки значений (4) и (5) в выражение (3) окончательно получим кинетическую энергию всей корнеуборочной машины:

$$T = \frac{1}{2} \left\{ M \left[ \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + 2(b-l)\dot{\psi}(-\dot{X} \sin \psi + \dot{Y} \cos \psi) + (b-l)\dot{\psi}^2 \right] + J_M \dot{\psi}^2 \right\} \quad (6)$$

По обобщенным координатам  $X$ ,  $Y$  и  $\psi$  определим обобщенные силы, воспользовавшись для этого выражениями элементарных работ сил на пути возможных перемещений данной системы [3]:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (7)$$

где  $\delta q_i$  – вариации соответствующих обобщенных координат.

Таким образом, по обобщенной координате  $X$  выражение обобщенной силы  $Q_x$  примет вид:

$$\begin{aligned} Q_x = & R_{x_1} \cos \psi + R_{B_3} \sin \psi + R_{x_2} \cos \psi + \\ & + R_{B_4} \sin \psi - R_{O_1} \cos \psi + R_{OB_1} \sin \psi - \\ & - R_{O_2} \cos \psi + R_{OB_2} \sin \psi - R_{Y_1} \cos(\psi + \psi_{\text{Л}}) - \\ & - R_{B_1} \sin(\psi + \psi_{\text{Л}}) - R_{Y_2} \cos(\psi + \psi_{\text{П}}) - \\ & - R_{B_2} \sin(\psi + \psi_{\text{П}}) - R_{A_1} \cos \psi - R_{A_2} \cos \psi - \\ & - R_{A_3} \cos \psi - \sum_{i=1}^6 R_{B_i} \cos \psi + \sum_{i=1}^6 R_{BB_i} \sin \psi. \end{aligned} \quad (8)$$

По обобщенной координате  $Y$  выражение обобщенной силы  $Q_y$  можно представить таким выражением:

$$\begin{aligned}
Q_y = & R_{B_1} \cos(\psi + \psi_{\text{Л}}) - R_{Y_1} \sin(\psi + \psi_{\text{Л}}) - \\
& - R_{B_2} \cos(\psi + \psi_{\text{П}}) - R_{Y_2} \sin(\psi + \psi_{\text{П}}) - \\
& - R_{A_1} \sin \psi - R_{A_2} \sin \psi - R_{A_3} \sin \psi - R_{O_1} \sin \psi - \\
& - R_{OB_1} \cos \psi - R_{O_2} \sin \psi - R_{OB_1} \cos \psi + \\
& + R_{X_1} \sin \psi - R_{B_3} \cos \psi + R_{X_2} \sin \psi - \\
& - R_{B_4} \cos \psi - \sum_{i=1}^6 R_{B_i} \sin \psi - \sum_{i=1}^6 R_{BB_i} \cos \psi.
\end{aligned} \tag{9}$$

В выражениях (8) и (9) отсутствуют проекции боковых реакций почвы на копирах автомата вождения, поскольку механизм их присоединения к раме допускает их движение в поперечной плоскости.

По обобщенной координате  $\psi$  обобщенная сила  $Q_\psi$  имеет размерность момента и может быть определена таким выражением:

$$Q_\psi = M_{\text{ПОВ.}} - M_{\text{СОПР.ПОВ.}} \tag{10}$$

где  $M_{\text{ПОВ.}}$  – момент сил, поворачивающих машину на угол  $\psi$ ;  $M_{\text{СОПР.ПОВ.}}$  – момент сил сопротивления повороту.

Если считать, что поворот машины при движении во время выполнения технологического процесса уборки осуществляется вокруг центра масс машины  $C$ , то, как следует из рис.1, на основании работы [5] и после подстановки в выражение (10) получим значение обобщенной силы  $Q_\psi$ :

$$\begin{aligned}
Q_\psi = & R_{B_1} [\cos \psi_{\text{Л}} (a - f \sin \psi_{\text{Л}}) + \sin \psi_{\text{Л}} (e + f \cos \psi_{\text{Л}})] + \\
& + R_{B_2} [\cos \psi_{\text{П}} (a + f \sin \psi_{\text{П}}) - \sin \psi_{\text{П}} (e + f \cos \psi_{\text{П}})] - \\
& - (R_{X_2} - R_{X_1}) d - (R_{B_3} - R_{B_4}) b - \\
& - \sum_{i=1}^6 R_{BB_i} h - \left( \sum_{i=1}^3 R_{B_i \text{Л}} - \sum_{i=1}^6 R_{B_i \text{П}} \right) 4,5 u + \\
& + (R_{OB_1} + R_{OB_2}) (a - p) - (R_{O_1} + R_{O_2}) s - \\
& - (R_{A_1} + R_{A_2}) m.
\end{aligned} \tag{11}$$

Подставив все необходимые величины и проведя преобразования, предусмотренные выражением (1), получим систему дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения самоходного машинного агрегата в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
& M \left[ \ddot{X} - (b-l)\ddot{y} \sin \psi + 2(b-l)\dot{y}^2 \cos \psi \right] = \\
& = R_{X_1} \cos \psi + R_{B_3} \sin \psi + R_{X_2} \cos \psi - \\
& - R_{O_1} \cos \psi + R_{OB_1} \sin \psi - R_{O_2} \cos \psi + \\
& + R_{OB_2} \sin \psi - R_{Y_1} \cos(\psi + \psi_{II}) - \\
& - R_{B_1} \sin(\psi + \psi_{II}) - R_{Y_2} \cos(\psi + \psi_{II}) - \\
& - R_{B_2} \sin(\psi + \psi_{II}) - R_{A_1} \cos \psi - \\
& - R_{A_2} \cos \psi - R_{A_3} \cos \psi + R_{B_4} \sin \psi - \\
& - \sum_{i=1}^6 R_{B_i} \cos \psi + \sum_{i=1}^6 R_{BB_i} \sin \psi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M \left[ \ddot{Y} + 2(b-l)\ddot{y} - 2(b-l)\dot{y} \sin \psi \right] = \\
& = R_{B_1} \cos(\psi + \psi_{II}) - R_{Y_1} \sin(\psi + \psi_{II}) + \\
& + R_{B_2} \cos(\psi + \psi_{II}) - R_{Y_2} \sin(\psi + \psi_{II}) - \\
& - R_{A_1} \sin \psi - R_{A_2} \sin \psi - R_{A_3} \sin \psi - \\
& - R_{O_1} \sin \psi - R_{OB_1} \cos \psi - R_{O_2} \sin \psi - \\
& - R_{OB_2} \cos \psi + R_{B_3} \cos \psi + R_{X_1} \sin \psi + \\
& + R_{X_2} \sin \psi - R_{B_4} \cos \psi - \sum_{i=1}^6 R_{B_i} \sin \psi - \\
& - \sum_{i=1}^6 R_{BB_i} \cos \psi;
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
I_M \ddot{\psi} &= R_{B_1} [\cos \psi_{II} (a - f \sin \psi_{II}) + \sin \psi_{II} (e + f \cos \psi_{II})] + \\
& + R_{B_2} [\cos \psi_{II} (a + f \sin \psi_{II}) - \sin \psi_{II} (e + f \cos \psi_{II})] - \\
& - (R_{X_2} - R_{X_1})d - (R_{B_3} - R_{B_4})b + \\
& + \sum_{i=1}^6 R_{BB_i} h - \left( \sum_{i=1}^3 R_{B_i,II} - \sum_{i=1}^6 R_{B_i,II} \right) 4,5u + \\
& + (R_{OB_1} + R_{OB_2})(a - p) - (R_{O_1} + R_{O_2})s - \\
& - (R_{A_1} + R_{A_2})m.
\end{aligned}$$

Численное решение системы (12) проведено на ЭВМ методом Рунге–Кутты–Фельберга 4–5-го порядков [6]. По результатам решений получены значения изменения обобщенных координат во времени, что позволило построить графики

траекторий движения центра масс корнеуборочной машины, а также центра крайнего выкапывающего рабочего органа при различном значении скорости движения (рис.2).

Из представленных графиков видно, что траектории движения корнеуборочной машины имеют вид, близкий к гармоническому, поскольку во время выполнения технологического процесса уборки машина находится под воздействием постоянно изменяющихся по величине и направлению внешних возмущающих воздействий. При этом в начальный момент времени траектории движения представляют собой плавное (неуправляемое) изменение кривых до некоторого значения, затем при поворотах управляемых колес (вручную или посредством автомата вождения по рядкам) происходит перераспределение боковых и нормальных реакций, и движение совершается в обратном направлении.

Амплитуда таких колебательных движений не превышает 0,23 м. В период установившегося движения частота указанных колебаний увеличивается до некоторого значения, равного 0,6 Гц. При более высоком значении скорости движения (рис.2, кривая 3) интервалы отклонения от прямолинейного направления повышаются.

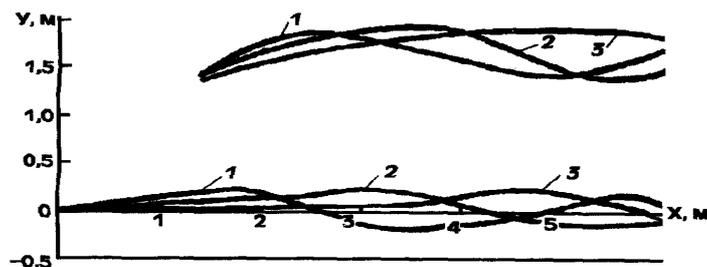


Рис.2. Траектории движения центра масс корнеуборочной машины и центра крайнего выкапывающего рабочего органа при различной скорости движения (м/с): 1 – 0,75; 2 – 1,68; 3 – 3,0.

Fig. 2. The movement trajectories of the centre of mass and center of outside lifters of root harvester for various working speeds (m/s): 1 – 0,75; 2 – 1,68; 3 – 3,0.

## ВЫВОДЫ

Таким образом, полученная система дифференциальных уравнений (12) содержит конструктивные параметры корнеуборочной машины, изменяя которые можно достичь таких значений кинематических параметров, которые будут способствовать более устойчивому движению самоходной корнеуборочной машины в горизонтальной плоскости. Далее, значения реакций поверхности почвы на пневматических колесах ходовой и копирующей системах данного машинного агрегата можно задавать, используя известные зависимости из теории автомобилей, тракторов и др. землеройных машин. Это также даст возможность оптимизировать параметры плоскопараллельного движения, а значит, и повысить качественные показатели технологического процесса машинного агрегата.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Зуев Н.М.**, 1980: Сахарная свекла, 10.
2. **Лурье А.И.**, 1961: Аналитическая механика. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.
3. **Василенко П.М., Василенко В.П.**, 1980: Методика построения расчетных моделей функционирования механических систем (машин и машинных агрегатов). - Киев: УСХА,.
4. **Василенко П.М.**, 1978: Вестник с.-х. Науки, 10.
5. **Смирнов Г.А.**, 1981: Теория движения колесных машин. М.: Машиностроение.
6. **Форсайт Дж. и др.** 1980: Машинные методы математических вычислений. - М.: Мир,.

THE MATHEMATICAL MODEL OF FLAT PARALLEL MOVEMENT  
OF ROOT HARVESTER

**Summary.** Present method relates to constructing calculated model of flat parallel movement of root harvester. The equations in Lagrange form of the second degree were adopted as initial equations. On results of numerical solution of obtained system of differential equations on computer and investigation by Lyapunov method were determined the dynamic characteristics of root harvester. Obtained dependencies might be applied for theoretical investigations of other mobile machinery aggregates.

**Keywords:** mathematical model, root harvester, flat parallel movement

Recenzent: Prof. dr Dymytro Voytyuk