

Volodymyr Bulgakov*, Janusz Nowak, Wojciech Przystupa**

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БАРАБАННОГО ОЧИСТИТЕЛЯ ГОЛОВОК КОРНЕПЛОДОВ

Аннотация. Предложена новая математическая модель взаимодействия барабана с головкой корнеплода в процессе счесывания остатков ботвы очистителем барабанного типа. На основе полученных дифференциальных уравнений движения барабана приведены математические зависимости, обосновывающие параметры барабанного очистителя.

Ключевые слова: mathematical model, sugar beet, cleaning drum

Процесс очистки головок корнеплодов от остатков ботвы на корню барабанным очистителем осуществляется в результате контакта поверхности барабана с головкой корнеплода, при котором за счет принудительного вращения барабана вокруг горизонтальной оси и его поступательного движения вокруг головки происходит ее очистка. Сетчатая поверхность барабана, которая счесывает остатки, образована перекрестным размещением металлических прутков определенного диаметра, которые и осуществляют данный технологический процесс.

В данной работе предложена новая система дифференциальных уравнений движения барабана в любой точке его контакта с головкой корнеплода с учетом всех сил, которые действуют при этом на барабан. На базе данной системы дифференциальных уравнений получены уточненные условия неотрывности барабана от головки корнеплода и математические зависимости для определения основных параметров барабанного очистителя.

Рассмотрим подробно методику построения математической модели движения барабанного очистителя корнеплодов, при его взаимодействии с головкой корнеплода. Для этого вначале составим эквивалентную схему движения барабана очистителя по поверхности головки корнеплода.

Считаем, что барабан очистителя радиусом R во время движения (поступательного перемещения “справа – налево” со скоростью \bar{V}_H и вращения с угловой скоростью ω) наезжает на головку корнеплода, который размещен

* Prof. dr Volodymyr Bulgakov, Gosudarstvienny Agrarny Universytet, Ukraina

** Dr hab. Janusz Nowak, dr Wojciech Przystupa, Akademia Rolnicza w Lublinie, Polska

(фактически жестко закреплен) в почве (рис.1). При этом головка корнеплода аппроксимируется полукругом, радиусом r , которая выступает над уровнем поверхности почвы на высоту h . Центр полукруга головки обозначен точкой O , ось барабана – O_1 .

Для составления дифференциальных уравнений движения барабана принята неподвижная система координат xAy , которая связана с поверхностью почвы. Ее начало находится в точке A , т.е. в точке контакта барабана с поверхностью почвы в момент его наезда на головку корнеплода (момент начала контакта барабана с головкой корнеплода в точке K_1). Поверхность почвы принята ровной и недеформируемой. При этом ось Ax направлена горизонтально в сторону поступательного движения очистителя, ось Ay – направлена вертикально вверх.

Подвижная система координат $\bar{x}K_i\bar{y}$ в любой момент времени будет иметь начало в подвижной точке K_i контакта барабана с головкой корнеплода. Ось $K_i\bar{x}$ в каждом рассматриваемом положении барабана будет направлена по касательной к поверхности головки корнеплода, ось $K_i\bar{y}$ – по нормали к этой поверхности.

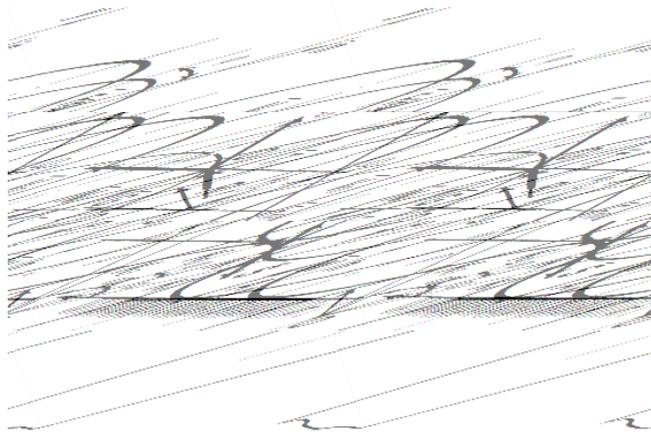


Рис.1. Схема движения барабана по головке корнеплода

Fig. 1. The diagram of the movement of the drum on the head of root-crop

Во время контакта барабана с головкой корнеплода, в произвольной ее точке, к барабану будут приложены следующие силы: \bar{G} – вес барабана, \bar{P} – сила прижима пружины, \bar{T} – сила тяги, \bar{F}_B – центробежная сила инерции, \bar{F}_{mp} – сила трения скольжения, \bar{S} – окружное усилие на барабане, \bar{N} – сила реакции со стороны почвы, \bar{N}_K – сила реакции корнеплода, направленная по нормали к поверхности головки.

Очевидно, что до первоначального соприкосновения барабана с головкой корнеплода, которое осуществляется в точке контакта K_1 , силы \bar{G} и \bar{P}

уравновешиваются силой реакции \bar{N} со стороны поверхности почвы. Кроме того, до точки контакта K_1 вектор скорости \bar{V}_{O_1} оси O_1 барабана совпадает с вектором скорости \bar{V}_Π поступательного движения очистителя, т.е. $\bar{V}_{O_1} = \bar{V}_\Pi$.

В точке K_1 вектор \bar{V}_{O_1} мгновенно изменяет свое направление и величину, причем

$$V_{O_1} = V_\Pi \cos \alpha.$$

В произвольной точке K_i контакта барабана с головкой корнеплода вектор \bar{V}_{O_1} будет равен

$$V_{O_1} = V_\Pi \cos \varphi,$$

где φ - угол между векторами \bar{V}_Π и \bar{V}_{O_1} .

Очевидно, что при движении барабана от точки K_1 до точки K_2 угол φ изменяется от α до нуля, а от точки K_2 до точки K_3 - от нуля до $-\alpha$ ("минус" α). Так же мгновенно после последней точки контакта K_3 скорость $\bar{V}_{O_1} = \bar{V}_\Pi$. Траекторией движения оси барабана O_1 от точки K_1 до точки K_3 есть дуга окружности радиусом ρ , причем

$$\rho = r + R,$$

где: $r = OK_1$ - радиус головки корнеплода; $R = K_1O_1$ - радиус барабана.

Траекторией движения оси барабана O_1 до и после контакта с головкой корнеплода будет прямая линия.

Центробежная сила инерции \bar{F}_B в произвольной точке контакта K_i будет равна

$$F_B = \frac{mV_{O_1}^2}{\rho} = \frac{mV_\Pi^2 \cos^2 \varphi}{\rho}, \quad (1)$$

соответственно в точках K_1 и K_3 ее значение будет определяться таким выражением:

$$F_B = \frac{mV_\Pi^2 \cos^2 \alpha}{\rho}, \quad (2)$$

в точке K_2 значение этой силы будет равно

$$F_B = F_{B_{max.}} = \frac{mV_\Pi^2}{\rho}. \quad (3)$$

Рассмотрим более подробно начало взаимодействия барабана с головкой корнеплода, для чего составим отдельную силовую схему, которая представлена на рис. 2.

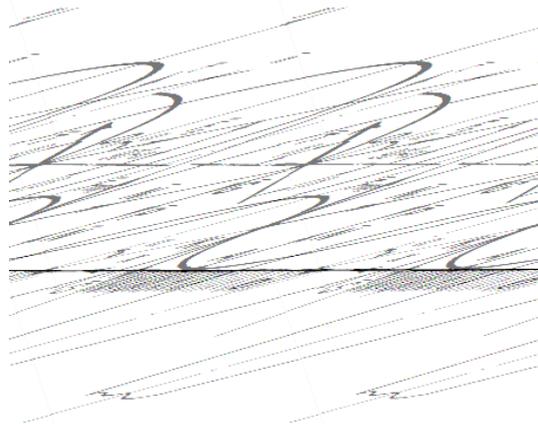


Рис.2. Схема начала взаимодействия барабана с головкой корнеплода

Fig. 2. The diagram of the initial interaction of the drum with the head of root-crop

Поскольку в точке контакта K_1 будет иметь место такое равенство

$$\bar{G} + \bar{P} + \bar{N} = 0,$$

то условие столкновения барабана с головкой корнеплода в данной точке в проекции на нормаль \bar{n} будет иметь такой вид

$$N_1 = [\sigma_d] A_K = T \sin(\alpha - \beta) - F_B,$$

или учитывая (2):

$$N_1 = [\sigma_d] A_K = T \sin(\alpha - \beta) - \frac{mV_{\bar{n}}^2 \cdot \cos^2 \alpha}{\rho}, \quad (4)$$

где: $[\sigma_d]$ – допустимое динамическое напряжение для корнеплодов;

A_K – площадь пятна контакта поверхностей барабана и корнеплода при их взаимодействии.

Для обеспечения процесса счесывания остатков с головки корнеплода необходимо подобрать необходимую силу контакта $\bar{N}_K \neq 0$ в любой точке K_i контакта барабана с головкой. Очевидно, что этому условию будет соответствовать такое аналитическое выражение

$$N_K = G \cos \varphi + P \cos \varphi - F_B + T \sin(\varphi - \beta) \neq 0, \quad (5)$$

или

$$N_K - G \cos \varphi - P \cos \varphi + F_B - T \sin(\varphi - \beta) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) представляет собой сумму проекций всех сил, которые приложены к барабану, на нормаль \bar{n} , проведенную через точку контакта K_i .

При заданном весе \bar{G} и радиусе R барабана, а также поступательной скорости его движения \bar{V}_H необходимое значение \bar{N}_K может обеспечить лишь усилие прижима пружины \bar{P} .

Отрыв барабана от головки корнеплода возможен лишь при условии, когда $N_K = 0$, или, учитывая (5), он определится таким аналитическим выражением:

$$G \cos \varphi + P \cos \varphi - F_B + T \sin(\varphi - \beta) = 0,$$

поэтому, гарантированным условием неотрывности есть условие, которое обеспечивается именно выражением (5).

Однако условие неотрывности фактически еще не обеспечивает требуемого уровня качества выполнения технологического процесса барабанным очистителем. Нужно за счет усилия прижима пружины \bar{P} подобрать необходимое \bar{N}_K , причем такое его значение, чтобы, прежде всего, выполнялось условие

$$N_K = [\sigma_{CT}] A_K, \quad (7)$$

где: $[\sigma_{CT}]$ – допустимое статическое напряжение для корнеплодов.

Необходимо учитывать то обстоятельство, что при условии $N_K > [\sigma_{CT}] A_K$ будет иметь место повреждение корнеплодов.

Таким образом, учитывая (6), технологический процесс работы барабанного очистителя (качественное счесывание остатков ботвы) возможен при таком условии:

$$[\sigma_{CT}] A_K - G \cos \varphi - P \cos \varphi + F_B - T \sin(\varphi - \beta) = 0. \quad (8)$$

Учитывая, что $G = mg$ и выражение (1) для центробежной силы инерции \bar{F}_B , из (8) получим

$$[\sigma_{CT}] A_K + \left(\frac{V_H^2 \cos \varphi}{\rho} - g \right) m \cdot \cos \varphi - P \cos \varphi - T \sin(\varphi - \beta) = 0, \quad (9)$$

для любой точки контакта K_i барабана с головкой корнеплода.

Для самой верхней точки K_2 ($\varphi = 0$) контакта барабана с головкой корнеплода из уравнения (9) получим:

$$[\sigma_{CT}] A_K + \left(\frac{V_{II}^2}{\rho} - g \right) m - P + T \sin \beta = 0. \quad (10)$$

Поскольку на участке K_1K_2 барабан, вследствие поступательного движения, наезжает на головку корнеплода, то условие неотрывности барабана на участке K_1K_2 будет гарантировано обеспеченным. На участке K_2K_3 наоборот, барабан съезжает с головки корнеплода, поэтому возможен его отрыв от головки.

Чтобы избежать отрыва барабана от головки корнеплода на участке K_2K_3 необходимо подобрать величину силы прижима пружины \bar{P} , которая бы обеспечивала контакт барабана с головкой корнеплода на протяжении всего участка K_2K_3 . Совершенно очевидно, что если указанный контакт будет обеспечен в точке K_3 , то он будет обеспечиваться и на всем участке K_2K_3 .

С этой целью необходимо составить дифференциальное уравнение движения барабана (его оси O_1) при полном обкатывании головки корнеплода. С учетом всех сил, которые действуют на барабан в любой точке K_i его контакта с головкой корнеплода, данное дифференциальное уравнение в векторной форме будет иметь такой вид:

$$m\bar{a} = \bar{N}_K + \bar{F}_B + \bar{P} + \bar{G} + \bar{F} + \bar{S} + \bar{T}, \quad (11)$$

где: m – масса барабана; \bar{a} – ускорение барабана.

Если спроектировать данное дифференциальное уравнение на оси x и y выбранной неподвижной системы координат, то получим систему дифференциальных уравнений, которая описывает в общем виде движение барабана очистителя по поверхности головки корнеплода:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{m} (-N_K \sin \varphi - F_B \sin \varphi + F_{mp.} \cos \varphi - S \cos \varphi + T \cos \beta), \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} (N_K \cos \varphi + F_B \cos \varphi - P - mg + F_{mp.} \sin \varphi - S \sin \varphi + T \sin \beta). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Далее выразим угол φ как функцию времени t . Время перемещения барабана по головке корнеплода от точки K_1 до точки K_3 будет равно:

$$t_1 = \frac{2\rho \cdot \sin \alpha}{V_{II}}. \quad (13)$$

Тогда, угловая скорость Ω обкатывания оси O_1 барабана вокруг центра O будет равна:

$$\Omega = \frac{2\alpha}{t_1}, \quad (14)$$

или, учитывая (13),

$$\Omega = \frac{V_{II} \cdot \alpha}{\rho \sin \alpha}. \quad (15)$$

Поскольку $\varphi = \alpha - \Omega t$, то из (15) получим значение угла φ

$$\varphi = \alpha - \frac{V_{II} \cdot \alpha}{\rho \cdot \sin \alpha} t. \quad (16)$$

Если учесть, что $F_{mp.} = fN_K$, где f - коэффициент трения скольжения поверхности барабана по поверхности головки корнеплода, а также выражение (1), то система дифференциальных уравнений (12) может быть представлена в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{m} \left[-N_K \sin(\alpha - \Omega t) - \frac{mV_{II}^2 \cdot \cos^2(\alpha - \Omega t)}{\rho} \sin(\alpha - \Omega t) + \right. \\ &\quad \left. + fN_K \cos(\alpha - \Omega t) - S \cos(\alpha - \Omega t) + T \cos \beta \right], \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} \left[N_K \cos(\alpha - \Omega t) + \frac{mV_{II}^2 \cdot \cos^3(\alpha - \Omega t)}{\rho} - P - mg + \right. \\ &\quad \left. + fN_K \sin(\alpha - \Omega t) - S \sin(\alpha - \Omega t) + T \sin \beta \right], \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где: Ω - угловая скорость перекатывания барабана по головке корнеплода, которая определяется согласно выражению (15).

Начальные условия для системы уравнений (17) будут такими.

При $t = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \alpha, \\ x &= 0, \\ \dot{x} &= V_{O_1}(0) \cdot \cos \alpha = V_{II} \cos^2 \alpha, \\ y &= R + r - h = \rho - h, \\ \dot{y} &= V_{O_1}(0) \cdot \sin \alpha = V_{II} \cos \alpha \cdot \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где: h – высота расположения головки корнеплода над уровнем поверхности почвы.

Система уравнений (17) интегрируется в квадратурах [1]. После интегрирования и нахождения произвольных постоянных получен такой закон движения оси O_1 барабана при обкатывании головки корнеплода:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{m} \left[\left(\frac{N_K}{\Omega^2} + \frac{mV_{II}^2}{3\rho\Omega^2} \right) \sin(\alpha - \Omega t) - \frac{mV_{II}^2}{9\rho\Omega^2} \sin^3(\alpha - \Omega t) + \left(\frac{S}{\Omega^2} - \frac{fN_K}{\Omega^2} \right) \cos(\alpha - \Omega t) + \right. \\ &+ T \cos \beta \cdot \frac{t^2}{2} \left. + \left\{ V_{II} \cos^2 \alpha - \frac{1}{m} \left[\left(\frac{S}{\Omega} - \frac{fN_K}{\Omega} \right) \sin \alpha - \frac{N_K}{\Omega} \cos \alpha - \frac{mV_{II}^2}{3\rho\Omega} \cos^3 \alpha \right] \right\} t - \right. \\ &\left. - \frac{1}{m} \left[\left(\frac{N_K}{\Omega^2} + \frac{mV_{II}^2}{3\rho\Omega^2} \right) \sin \alpha - \frac{mV_{II}^2}{9\rho\Omega^2} \sin^3 \alpha + \left(\frac{S}{\Omega^2} - \frac{fN_K}{\Omega^2} \right) \cos \alpha \right]; \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{m} \left[- \left(\frac{N_K}{\Omega^2} + \frac{2mV_{II}^2}{3\rho\Omega^2} \right) \cos(\alpha - \Omega t) - \frac{mV_{II}^2}{9\rho\Omega^2} \cos^3(\alpha - \Omega t) - (P + mg) \frac{t^2}{2} + \right. \\ &+ \left(\frac{S}{\Omega^2} - \frac{fN_K}{\Omega^2} \right) \sin(\alpha - \Omega t) + T \sin \beta \cdot \frac{t^2}{2} \left. + V_{II} \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{m} \left[- \left(\frac{N_K}{\Omega} + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{mV_{II}^2}{\rho\Omega} \right) \sin \alpha + \frac{mV_{II}^2}{3\rho\Omega} \sin^3 \alpha + \left(\frac{fN_K}{\Omega} - \frac{S}{\Omega} \right) \cos \alpha \right] t + \rho - h - \\ &\left. - \frac{1}{m} \left[- \left(\frac{N_K}{\Omega^2} + \frac{2mV_{II}^2}{3\rho\Omega^2} \right) \cos \alpha - \frac{mV_{II}^2}{9\rho\Omega^2} \cos^3 \alpha + \left(\frac{S}{\Omega^2} - \frac{fN_K}{\Omega^2} \right) \sin \alpha \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

Условия неотрывности барабана в точке K_2 найдем из уравнения (20) при

$$\text{условии } t = \frac{t_1}{2} = \frac{\rho \sin \alpha}{V_{II}}, \quad y = \rho, \quad \Omega = \frac{V_{II} \cdot \alpha}{\rho \sin \alpha} :$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m} \cdot \frac{N_K \cdot \rho^2 \sin^2 \alpha}{V_{II}^2 \cdot \alpha^2} \cdot (\cos \alpha - 1) + \frac{2\rho \sin^2 \alpha}{3\alpha^2} (\cos \alpha - 1) + \\
& + \frac{\rho \sin^2 \alpha}{9\alpha^2} (\cos^3 \alpha - 1) - \frac{(P + mg)\rho^2 \sin^2 \alpha}{2mV_{II}^2} + \frac{T \rho^2 \sin \beta \cdot \sin^2 \alpha}{2mV_{II}^2} + \\
& + \rho \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \frac{1}{m} \cdot \frac{N_K \cdot \rho^2 \sin^3 \alpha}{V_{II}^2 \cdot \alpha} + \frac{\rho \sin^2 \alpha}{\alpha} - \frac{\rho \sin^5 \alpha}{3\alpha} - \\
& - \frac{1}{m} \left(\frac{fN_K \rho^2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha - S \cdot \rho^2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{V_{II}^2 \cdot \alpha} \right) - h - \\
& - \frac{1}{m} \cdot \frac{(S \cdot \rho^2 \sin^3 \alpha - fN_K \cdot \rho^2 \sin^3 \alpha)}{V_{II}^2 \cdot \alpha^2} = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Условия неотрывности барабана в точке K_3 , а, следовательно, и на всем участке K_2K_3 , получим из уравнения (20) при $t = t_1 = \frac{2\rho \sin \alpha}{V_{II}}$, $y = \rho - h$:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{m} (P + mg) \frac{\rho^2 \sin^2 \alpha}{V_{II}^2} - \frac{1}{m} \cdot \frac{(S - fN_K)\rho^2 \sin^3 \alpha}{V_{II}^2 \cdot \alpha^2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{T \sin \beta \cdot \rho^2 \sin^2 \alpha}{V_{II}^2} + \\
& + \rho \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \frac{1}{m} \cdot \frac{N_K \cdot \rho^2 \sin^3 \alpha}{V_{II}^2 \cdot \alpha} + \frac{\rho \cdot \sin^3 \alpha}{\alpha} - \frac{\rho \cdot \sin^5 \alpha}{3\alpha} - \\
& - \frac{1}{m} \cdot \frac{(fN_K - S)\rho^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{V_{II}^2 \cdot \alpha} = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Полученные условия неотрывности (21) и (22) являются более точными по сравнению с условиями, которые определены уравнениями (9) и (10). Кроме того, из условий (21), (22) и уравнения (4) можно определить массу барабана, которая обеспечит данное условие неотрывности. Этого нельзя было сделать, используя условия (9) или (10), поскольку в них массу барабана, наоборот, необходимо было бы задавать.

Для определения неизвестных величин – площади пятна контакта A_K , массы барабана m и силы прижима пружин \bar{P} рассмотрим систему уравнений (4), (21) и (22).

Так, из уравнения (4) находим площадь пятна контакта барабана с головкой корнеплода. Она равна:

$$A_K = \frac{T \cdot \rho \cdot \sin(\alpha - \beta) - mV_{II}^2 \cdot \cos^2 \alpha}{[\sigma_d] \rho}. \tag{23}$$

Далее, учитывая (7), получим силу реакции \bar{N}_K , которая будет равна

$$N_K = \frac{[\sigma_{CT}] \cdot [T \cdot \rho \sin(\alpha - \beta) - mV_{II}^2 \cdot \cos^2 \alpha]}{[\sigma_D] \rho}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в уравнение (21) и (22), после ряда преобразований можно получить выражение для определения массы барабана m , при которой будет обеспечиваться неотрывное движение барабана по головке корнеплода.

Силу прижима пружины \bar{P} также можно найти из условия неотрывности барабана от головки корнеплода в точке K_3 , т.е. из уравнения (22).

Решая данное уравнение относительно \bar{P} , с учетом (24), эта сила будет равна:

$$\begin{aligned} P = m & \left[-g - \frac{[\sigma_{CT}] V_{II}^2 \cos^2 \alpha}{[\sigma_D] \rho} \left(\frac{f \sin \alpha}{\alpha^2} + \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{f \cos \alpha}{\alpha} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{V_{II}^2 \cos \alpha}{\rho} + \frac{V_{II}^2 \sin \alpha}{\alpha \rho} - \frac{V_{II}^2 \sin^3 \alpha}{3\alpha \rho} \right] - \frac{S \sin \alpha}{\alpha^2} + \\ & + \frac{[\sigma_{CT}] T \sin(\alpha - \beta)}{[\sigma_D]} \left(\frac{f \sin \alpha}{\alpha^2} + \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{f \cos \alpha}{\alpha} \right) + \\ & + T \sin \beta + \frac{S \cos \alpha}{\alpha}, \end{aligned} \quad (25)$$

где: m – масса барабана.

Поскольку сила \bar{P} определена с учетом (24), то это как раз и есть максимально допустимая сила прижима барабана к головке корнеплода, при которой будет обеспечено эффективное счесывание остатков с головки корнеплода без ее повреждения.

Полученные математические зависимости дают возможность только конструктивными и технологическими параметрами рассчитать оптимальные параметры барабанного очистителя головок корнеплодов.

ЛІТЕРАТУРА

Пискунов Н.С., 1976: Дифференциальное и интегральное исчисления. Для вузов, Т.2, Изд. 11-е. М.: Наука, 576 с.

MATHEMATICAL MODEL OF DRUM-TYPE SUGAR BEET TOPS CLEANER

Summary. The specified mathematical model of interaction of a cleaning drum and rests of sugar-beet leafy tops is offered. On the basis of the new differential equations of drum movement, the mathematical dependencies are given. It enables to compute drum-type cleaner parameters.

Keywords: mathematical model, sugar beet, cleaning drum

Recenzent: Prof. dr Dymytro Voytyuk