

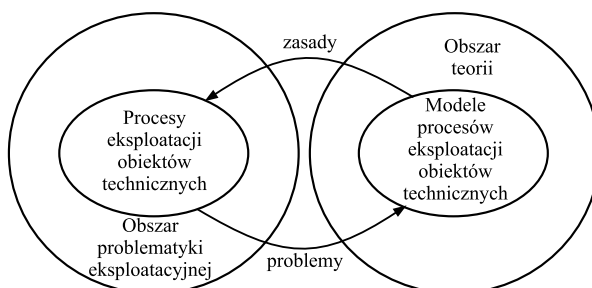
Stanisław NIZIŃSKI
Sławomir WIERZBICKI

MODEL MATEMATYCZNY PROCESU EKSPLOATACJI POJAZDÓW MECHANICZNYCH

Model of exploitation process of mechanical vehicles

Wstęp

W fazie eksploatacji pojazdów mechanicznych zachodzą różnorodne procesy, a w szczególności (rys. 1): użytkowania, zużycia, diagnozowania, prognozowania i genezowania stanów, obsługiwanie, przechowywania i konserwacji, przetwarzania, przechowywania i przedstawiania informacji, zarządzania eksploatacją.



Rys. 1. Koncepcja modelowania rzeczywistości eksploatacyjnej pojazdów mechanicznych

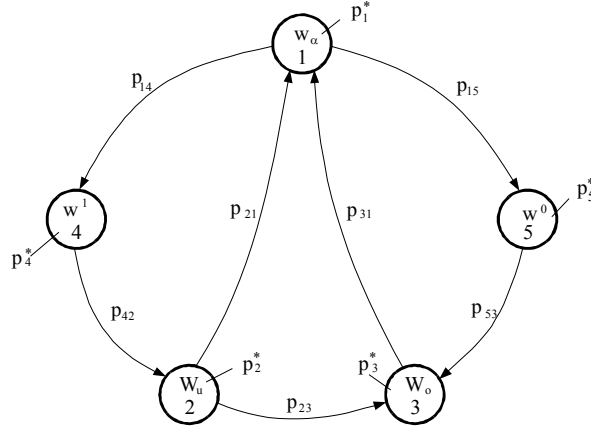
Niniejsza praca jest ograniczona do problematyki niektórych stochastycznych modeli matematycznych procesów eksploatacji pojazdów mechanicznych.

Graf procesu eksploatacji

Graf procesu eksploatacji pojazdów mechanicznych, w którym uwzględniono stan w^1 ich zdadności i stan w^0 niezawodności przedstawiono na rys. 2 [4].

Prof. dr hab. inż. **Stanisław Niziński**, dr inż. **Sławomir Wierzbicki** Wydział Nauk Technicznych Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie

Pierwszą operacją wprowadzającą pojazdy mechaniczne do procesu eksploatacji jest ich diagnozowanie (stan w_α). W przypadku zdadności pojazdów z prawdopodobieństwem p_{14} są one kierowane do stanu zdadności w^1 , jeżeli są niezdatne, do stanu w^0 niezdatności, z prawdopodobieństwem p_{15} . Zdatne pojazdy mechaniczne są następnie kierowane do podzbioru stanów W_u użytkowania, zaś niezdatne do podzbioru stanów W_o obsługiwanego. Po wykonaniu zadań operacyjnych w podsystemie użytkowania pojazdy mechaniczne są kierowane ponownie do stanu w_α ich diagnozowania. Dotyczy to również pojazdów, w których wykonano naprawy lub inne zabiegi obsługowe.



Rys. 2. Graf eksploatacji pojazdów mechanicznych z uwzględnieniem stanu w^1 zdadności i stanu w^0 niezdatności: w_α , W_u i W_o – zbiory stanów: diagnozowania, użytkowania i obsługiwanego; p_{14} , p_{15} , p_{21} , p_{23} , p_{42} , p_{53} – prawdopodobieństwa przejść procesu eksploatacji pojazdów mechanicznych, p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , p_5 – prawdopodobieństwa graniczne przebywania obiektów w wyróżnionych stanach

Z opisu grafu przedstawionego na rys. 2 widać, że do procesu eksploatacji pojazdów mechanicznych wprowadzono kryterium oceny efektywności, którym jest stan techniczny. Jest to graf podstawowy, na jego bazie będą budowane grafy i modele matematyczne innych procesów eksploatacji pojazdów mechanicznych.

Model dyskretny w stanach i czasie

Macierz prawdopodobieństw przejść stanów ma postać (1):

$$P_{\alpha A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & 0 & p_{23} & 0 & 0 \\ p_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{42} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{53} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Z macierzy (1) wynika, że:

$$\begin{aligned} p_{14} + p_{15} &= 1 \\ p_{21} + p_{23} &= 1 \\ p_{31} &= 1 \\ p_{42} &= 1 \\ p_{53} &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Biorąc pod uwagę wyrażenie, że proces eksploatacji jest dyskretny w stanach i czasie [2, 3, 5, 6, 7], uzyskujemy następujące równania stanów granicznych:

$$\begin{aligned} p_1^* &= p_{21} \cdot p_2^* + p_{31} \cdot p_3^* \\ p_2^* &= p_{42} \cdot p_4^* \\ p_3^* &= p_{23} \cdot p_2^* + p_{53} \cdot p_5^* \\ p_4^* &= p_{14} \cdot p_1^* \\ p_5^* &= p_{15} \cdot p_1^* \end{aligned} \quad (3)$$

Warunek normalizacyjny na następującą postać:

$$p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* + p_5^* = 1 \quad (4)$$

Zapis macierzowy równań (3) i (4) przedstawia wyrażenie:

$$\begin{bmatrix} -1 & p_{21} & p_{31} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & p_{42} & 0 \\ 0 & p_{23} & -1 & 0 & p_{53} \\ p_{14} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \\ p_5^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$A_A \cdot P_A = B_A \quad (6)$$

Rozwiązanie równań (5) i (6) określa wzór:

$$P_A = A_A^{-1} \cdot B_A \quad (7)$$

Prawdopodobieństwa graniczne stanów są następujące:

$$\begin{aligned}
p_1^* &= \frac{1}{3 + p_{14}(2 - 2p_{21} - p_{23})} \\
p_2^* &= \frac{p_{14}}{3 + p_{14}(2 - 2p_{21} - p_{23})} \\
p_3^* &= \frac{1 - p_{14} \cdot p_{21}}{3 + p_{14}(2 - 2p_{21} - p_{23})} \\
p_4^* &= \frac{p_{14}}{3 + p_{14}(2 - 2p_{21} - p_{23})} \\
p_5^* &= \frac{1 - p_{14}}{3 + p_{14}(2 - 2p_{21} - p_{23})}
\end{aligned} \tag{8}$$

Model dyskretny w stanach i ciągły w czasie

Biorąc pod uwagę, że proces eksploatacji pojazdów mechanicznych jest dyskretny w stanach i ciągły w czasie [2, 3, 5, 6, 7], układ równań opisujących proces eksploatacji pojazdów mechanicznych (rys. 3) ma postać:

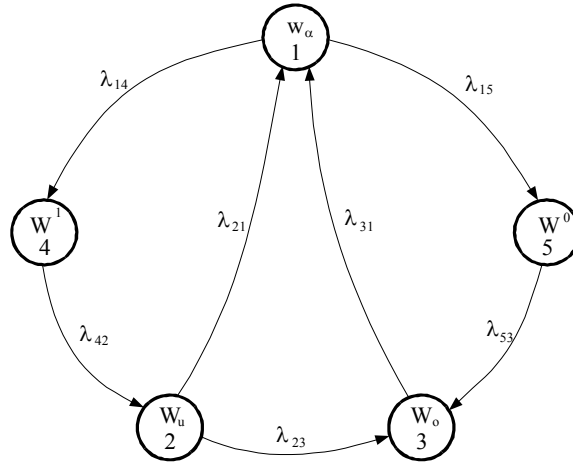
$$\begin{aligned}
-\lambda_{14} \cdot p_1^0 - \lambda_{15} \cdot p_1^0 + \lambda_{21} \cdot p_2^0 + \lambda_{31} \cdot p_3^0 &= 0 \\
-\lambda_{21} \cdot p_2^0 - \lambda_{23} \cdot p_2^0 + \lambda_{42} \cdot p_4^0 &= 0 \\
-\lambda_{31} \cdot p_3^0 - \lambda_{23} \cdot p_2^0 + \lambda_{53} \cdot p_5^0 &= 0 \\
-\lambda_{42} \cdot p_4^0 + \lambda_{14} \cdot p_1^0 &= 0 \\
-\lambda_{53} \cdot p_5^0 + \lambda_{15} \cdot p_1^0 &= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Równanie piąte zastępujemy warunkiem normalizującym:

$$p_1^0 + p_2^0 + p_3^0 + p_4^0 + p_5^0 = 1, \tag{10}$$

otrzymując:

$$\begin{aligned}
(-\lambda_{14} - \lambda_{15})p_1^0 + \lambda_{21} \cdot p_2^0 + \lambda_{31}p_3^0 &= 0 \\
(-\lambda_{21} - \lambda_{23})p_2^0 + \lambda_{42}p_4^0 &= 0 \\
\lambda_{23} \cdot p_2^0 - \lambda_{31}p_3^0 + \lambda_{53} \cdot p_5^0 &= 0 \\
\lambda_{14} \cdot p_1^0 - \lambda_{42} \cdot p_4^0 &= 0 \\
p_1^0 + p_2^0 + p_3^0 + p_4^0 + p_5^0 &= 1
\end{aligned} \tag{11}$$



Rys. 3. Graf procesu eksploatacji pojazdów mechanicznych, w którym wyróżniono stan zdolności w^1 i stan niezdolności w^0 ; w_α , w_u i w_o – stany: diagnozowania, użytkowania i obsługiwanie; λ_{14} , λ_{15} , λ_{42} , λ_{53} , λ_{21} , λ_{31} – intensywność przejść obiektów między wyróżnionymi stanami

W zapisie macierzowym układ równań (11) ma postać:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_{14} - \lambda_{15} & \lambda_{21} & \lambda_{31} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{21} - \lambda_{23} & 0 & \lambda_{42} & 0 \\ 0 & \lambda_{23} & -\lambda_{31} & 0 & \lambda_{53} \\ \lambda_{14} & 0 & 0 & -\lambda_{42} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \\ p_3^0 \\ p_4^0 \\ p_5^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$A_B \cdot P_B = B_B \quad (13)$$

Rozwiązanie układu równań (13) określa wartość prawdopodobieństwa granicznych wyróżnionych stanów:

$$P_B = A_B^{-1} \cdot B_B \quad (14)$$

Model semi-Markowa

Biorąc pod uwagę proces eksploatacji pojazdów mechanicznych jako proces semi-Markowa [2, 4, 7], rozkład graniczny procesu eksploatacji pojazdów mechanicznych (rys. 2) określają wzory:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{p_1^* \cdot ET_1}{p_1^* E(T_1) + p_2^* E(T_2) + p_3^* E(T_3) + p_4^* E(T_4) + p_5^* E(T_1)} = \\
&= \frac{ET_1}{E(T_1) + p_{14} E(T_2) + (1 - p_{14} \cdot p_{21}) E(T_3) + p_{14} \cdot E(T_4) + (1 - p_{14}) E(T_5)} \\
p_2 &= \frac{p_2^* \cdot E(T_2)}{p_1^* E(T_1) + p_2^* E(T_2) + p_3^* E(T_3) + p_4^* E(T_4) + p_5^* E(T_1)} = \\
&= \frac{p_{14} E(T_2)}{E(T_1) + p_{14} E(T_2) + (1 - p_{14} \cdot p_{21}) \cdot E(T_3) + p_{14} \cdot E(T_4) + (1 - p_{14}) E(T_5)} \\
p_3 &= \frac{(1 - p_{14} \cdot p_{21}) \cdot E(T_3)}{E(T_1) + p_{14} E(T_2) + (1 - p_{14} \cdot p_{21}) \cdot E(T_3) + p_{14} \cdot E(T_4) + (1 - p_{14}) E(T_5)} \quad (15) \\
p_4 &= \frac{p_{14} E(T_4)}{E(T_1) + p_{14} E(T_2) + (1 - p_{14} \cdot p_{21}) \cdot E(T_3) + p_{14} \cdot E(T_4) + (1 - p_{14}) E(T_5)} \\
p_5 &= \frac{(1 - p_{14}) E(T_5)}{E(T_1) + p_{14} E(T_2) + (1 - p_{14} \cdot p_{21}) \cdot E(T_3) + p_{14} \cdot E(T_4) + (1 - p_{14}) E(T_5)}
\end{aligned}$$

gdzie:

$p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*, p_5^*$ – prawdopodobieństwa graniczne (8) włożonego łańcucha Markowa;
 $E(T_1), E(T_2), E(T_3), E(T_4), E(T_5)$ – wartości oczekiwane czasów przebywania pojazdów mechanicznych w wyróżnionych stanach.

Prawdopodobieństwa graniczne (15) można interpretować następująco:

- prawdopodobieństwo p_1 jest współczynnikiem, który charakteryzuje proces diagnozowania pojazdów (K_d – współczynnik diagnozowania);
- prawdopodobieństwo p_2 to współczynnik określający zbiór zdalnych pojazdów oczekujących na użytkowanie (K_{ou} – współczynnik oczekiwania użytkowania);
- prawdopodobieństwo p_3 jest współczynnikiem, który charakteryzuje niezdatne pojazdy oczekujące na obsługiwanie (K_{oo} – oczekiwanie obsługiwania);
- prawdopodobieństwo p_4 to współczynnik, który określa zbiór zdalnych i użytkowanych pojazdów mechanicznych (K_u – współczynnik użytkowania);
- $p_2 + p_4 = K_{gt}$ – współczynnik gotowości technicznej obiektów;
- prawdopodobieństwo p_5 to współczynnik, który wskazuje frakcje niezdatnych pojazdów mechanicznych, która jest obsługiwana (K_o – współczynnik obsługiwania).

Należy zaznaczyć, że zachodzi następująca relacja:

$$K_d + K_{ou} + K_u + K_{oo} + K_o = K_d + K_{gt} + K_{oo} + K_o = 1 \quad (16)$$

Wnioski

Reasumując rozpatrzone zagadnienia dotyczące wybranych modeli stochastycznych do opisu zmian procesów eksploatacji pojazdów mechanicznych można stwierdzić, co następuje:

- proces eksploatacji pojazdów mechanicznych można traktować jako łańcuchy Markowa, tzn. dyskretne w stanach i czasie,
- pełniejszą informację o procesach eksploatacji pojazdów mechanicznych można uzyskać traktując je jako procesy dyskretne w stanach i ciągle w czasie,
- proces semi-Markowa lepiej opisuje procesy eksploatacji pojazdów mechanicznych niż proces Markowa, ponieważ czasy przebywania procesu w stanach jako zmienne losowe mogą mieć rozkłady dowolne, a nie tylko wykładnicze.

Piśmiennictwo

1. Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1967.
2. Grabowski F.: Teoria semi-markowskich procesów eksploatacji obiektów technicznych. Zesz. Nauk. 75A. Wyż. Sz. Marynarki Wojennej, Gdynia 1982.
3. Koźniewska I., Włodarczyk M.: Modele odnowy niezawodności i masowej obsługi. PWN, Warszawa 1978.
4. Niziński S., Wierzbiński S., Ligier K.: Model matematyczny procesu eksploatacji pojazdów mechanicznych. WITPIS, Sulejówek 2002.
5. Rosenblatt M.: Procesy stochastyczne. PWN, Warszawa 1969.
6. Rozanow J. A.: Wstęp do teorii procesów stochastycznych. PWN, Warszawa 1974.
7. Woropay M., Knopik L., Landowski B.: Modelowanie procesów eksploatacji w systemie transportowym. Bibl. Probl. Eksp. ITE, Bydgoszcz-Radom 2001.

Streszczenie

The work is dedicated to models of exploitation process of mechanical vehicles which is treated as: Markov chain, process in states and time, semi-Markov process. The exploitation process of mechanical vehicles is described by: diagnosing, operational, non-operational, use and service.

Summary

The work is dedicated to models of exploitation process of mechanical vehicles which is treated as: Markov chain, process in states and time, semi-Markov process. The exploitation process of mechanical vehicles is described by: diagnosing, operational, non-operational, use and service.

Recenzent: Dr hab. inż. Zbigniew Burski