#### ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН С ТОНКИМ КРУГЛЫМ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМ ОТСЛОИВШИМСЯ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Larysa Vakhonina

Mykolayiv State Agrarian University, Ukraine Krylova Street 17, Mykolayiv 54040, Ukraine

e-mail:vakhonina-l@rambler.ru

Аннотация. В работе исследуется концентрация напряжений вблизи круглого жесткого отслоившегося включения, которое находится в неограниченном упругом теле (матрице). Метод решения базируется на представлении перемещений в матрице через разрывные решения уравнений Ламе для гармонических колебаний. Это позволило свести исходную задачу к системе сингулярных интегральных уравнений относительно функций связанных со скачками напряжений и перемещений на включении. Ее решение строится приближенно методом коллокаций. Полученное приближенное решение дало возможность численно исследовать напряженное состояние в матрице вблизи включения.

**Ключевые слова:** тонкие дискообразные включения, гармонические волны, сингулярные интегральные уравнения, коэффициент интенсивности напряжений.

#### ВСТУПЛЕНИЕ

Наличие в деталях машин и инженерных сооружениях технологических дефектов или конструктивных элементов в виде тонких жестких включений является источником концентрации напряжений, которая может привести к разрушению конструкции. Особенно сложными являются задачи по определению напряженного состояния вблизи таких включений при динамическом нагружении. Поскольку очень часто включения имеют жесткость большую чем матрица (подкрепление, армирующие элементы в композитах), то значительно распространенным является подход когда включения считаются абсолютно жесткими. Например, такое предположение реализовано в статьях [14] [15] [16].

Установлено, что наибольшая концентрация напряжений наблюдается в окрестностях отслоившихся включений. Задачи статики упругих тел с такими включениями достаточно полно изучены [1], [2]. Концентрация напряжений вблизи отслоившихся включений при динамическом воздействии на тела исследованы значительно меньше, даже для случая гармонических колебаний. Результаты этих исследований можно найти в работах [3], [4], где рассматривалось тело с тонким отслоившимся полосовым включением, а также в работе [5], в которой решена задача о крутильных колебаниях тела с тонким круговым отслоившимся включением. Целью настоящей работы является исследование концентрации напряжений вблизи такого же включения при взаимодействии с гармоническими волнами в условиях осевой симметрии.

# ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в неограниченном упругом теле находится абсолютно жесткое включение в виде тонкой круговой пластины толщиной h и радиуса a (h << a). Если ввести цилиндрическую систему координат, начало которой совпадает с центром включения, то в плоскости z = 0 оно займет круг  $r \le a, 0 \le \theta < 2\pi$ . В теле происходят осесимметричные колебания в результате распространения в нем упругих волн. Допускаются следующие случаи волнового воздействия. В первом случае в теле распространяется плоская продольная волна, фронт которой параллелен плоскости включения. Эта волна задается потенциалом:

$$\varphi_0 = \frac{A_0 e^{i\kappa_1 z}}{\kappa_1},\tag{1}$$

и вызывает в теле перемещения :

 $u_{z}^{0} = iA_{0}e^{i\kappa_{1}z}$ ,  $u_{r}^{0} = 0$ .

$$\varphi_0(r,z) = \frac{A_0}{\beta_1} J_0(\beta_1 r) e^{i\gamma z} .$$
<sup>(2)</sup>

Перемещения, вызванные этими волнами, определяются по формулам:

$$u_{z}^{0} = \frac{i\gamma A_{0}}{\beta_{1}} J_{0}(\beta_{1}r) e^{i\gamma z} ; \qquad u_{r}^{0} = -A_{0} J_{0}(\beta_{1}r) e^{i\gamma z} .$$
(3)

В третьем случае в теле распространяются поперечные цилиндрические волны с потенциалом:

$$\Psi_0(r,z) = \frac{B_0}{\beta_2^2} J_0(\beta_2 r) e^{i\gamma z} .$$
(4)

Они вызывают в теле перемещения:

$$u_{z}^{0} = B_{0}J_{0}(\beta_{2}r)e^{i\gamma z}, \quad u_{r}^{0} = -\frac{i\gamma B_{0}}{\beta_{2}}J_{1}(\beta_{2}r)e^{i\gamma z}.$$
(5)

В формулах (1) – (5) и всюду далее множитель  $e^{-i\omega t}$ , определяющий зависимость от времени опущен. Так же в этих формулах приняты обозначения

$$\kappa_2 = \frac{\omega}{c_k}; \quad \beta_k = \sqrt{\kappa_k^2 - \gamma^2}; \quad k = 1, 2; \quad \tilde{n}_1 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}; \quad \tilde{n}_2 = \frac{\mu_2}{\rho_2}.$$

Пусть  $u_z^1$ ,  $u_r^1$  - перемещения вызванные волнами, отраженными от включения. Они удовлетворяют уравнениям движения Ламе для гармонических колебаний в условиях осевой симметрии [6]. Малая толщина включения даёт возможность сформулировать граничные условия для этих уравнений на его срединной плоскости z = 0. Считается, что одна из сторон включения (z = -0) полностью сцеплена с внешней средой, а другая (z = +0) отслоилась и на ней выполнены условия гладкого контакта. При этих условиях на включении будут разрывными напряжения и радиальные перемещения, для скачков которых вводятся обозначения: Larysa Vakhonina

$$\left\langle \sigma_{z}^{1} \right\rangle = \sigma_{z}^{1}(r,+0) - \sigma_{z}^{1}(r,-0) = \chi_{1}(r), \quad \left\langle \tau_{rz}^{1} \right\rangle = \tau_{rz}^{1}(r,+0) - \tau_{rz}^{1}(r,-0) = \chi_{2}(r),$$

$$\left\langle u_{r}^{1} \right\rangle = u_{r}^{1}(r,+0) - u_{r}^{1}(r,-0) = \chi_{4}(r), \quad r \in [0,a].$$

$$(6)$$

Помимо граничных условий (6) на отслоившейся и сцепленной сторонах включения выполняются равенства:

$$\tau_{r_z}^1(r,+0) = -\tau_{r_z}^0(r,+0), \quad u_z(r,\pm 0) = d - u_z^0(r,0), \quad u_r(r,-0) = -u_r^0(r,0).$$
(7)

В равенстве (7) *d* - неизвестная амплитуда колебаний включения вдоль оси Oz. Для ее определения необходимо использовать уравнение движения включения, которое при гармонических колебаниях имеет вид [12]:

$$2\pi \int_{0}^{\infty} r \chi_{1}(r) dr = m_{0}^{2} \omega^{2} d , \qquad (8)$$

где:  $m_0 = \pi a^2 h \rho_0$  - масса включения,  $\rho_0$  – плотность материала включения.

Таким образом, задача о колебаниях упругих тел с тонким отслоившимся включением свелась к граничной задаче для уравнений Ламе с граничными условиями (6), (7).

# ВЫВОД И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения полученной граничной задачи перемещения в теле представлены разрывным решением уравнений Ламе со скачками (6). Это представление имеет вид: [6]:

$$\begin{aligned} u_{z}^{1} &= \int_{0}^{a} \eta \frac{\chi_{1}(\eta)}{\mu_{1}} g_{31}(\eta, r, z) d\eta + \int_{0}^{a} \eta \frac{\chi_{2}(\eta)}{\mu_{1}} g_{32}(\eta, r, z) d\eta + \int_{0}^{a} \eta \chi_{4}(\eta) g_{34}(\eta, r, z) d\eta , \\ u_{r}^{1} &= \int_{0}^{a} \eta \frac{\chi_{1}(\eta)}{\mu_{1}} g_{41}(\eta, r, z) d\eta + \int_{0}^{a} \eta \frac{\chi_{2}(\eta)}{\mu_{1}} g_{42}(\eta, r, z) d\eta + \int_{0}^{a} \eta \chi_{4}(\eta) g_{44}(\eta, r, z) d\eta , \\ \text{rge:} \\ g_{31}(\eta, r, z) &= \frac{1}{2\kappa_{2}^{2}} \int_{0}^{\infty} \lambda \left[ \gamma_{1} e^{-\gamma_{1}|z|} - \frac{\lambda^{2}}{\gamma_{2}} e^{-\gamma_{2}|z|} \right] J_{0}(\lambda r) J_{0}(\lambda \eta) d\lambda , \\ g_{32}(\eta, r, z) &= -\frac{1}{2\kappa_{2}^{2}} \int_{0}^{\infty} \lambda^{2} \left[ e^{-\gamma_{1}|z|} - e^{-\gamma_{2}|z|} \right] J_{1}(\lambda \eta) J_{0}(\lambda r) d\lambda , \\ g_{34}(\eta, r, z) &= \frac{1}{2\kappa_{2}^{2}} \int_{0}^{\infty} \lambda^{2} \left[ e^{-\gamma_{1}|z|} - \frac{(2\lambda^{2} - \kappa_{2}^{2})}{\gamma_{2}} e^{-\gamma_{2}|z|} \right] \lambda^{2} J_{0}(\lambda r) J_{1}(\lambda \eta) d\lambda , \\ g_{41}(\eta, r, z) &= \frac{1}{2\kappa_{2}^{2}} \int_{0}^{\infty} \lambda^{2} \left[ e^{-\gamma_{1}|z|} - e^{-\gamma_{2}|z|} \right] J_{0}(\lambda \eta) J_{1}(\lambda r) d\lambda , \\ g_{42}(\eta, r, z) &= -\frac{1}{2\kappa_{2}^{2}} \int_{0}^{\infty} \left[ \frac{\lambda^{2}}{\Box} e^{-\gamma_{1}|z|} - \Box_{2} A^{-\gamma_{2}|z|} \right] \lambda J_{1}(\lambda r) J_{1}(\lambda \eta) d\lambda , \\ g_{44}(\eta, r, z) &= -\frac{1}{2\kappa_{2}^{2}} \int_{0}^{\infty} \left[ 2\Box^{2} E^{-\gamma_{1}|z|} - \Box_{2} A^{-\gamma_{2}|z|} \right] \lambda J_{1}(\lambda r) J_{1}(\lambda r) J_{1}(\lambda) d\lambda , \end{aligned}$$

164

a

$$\gamma_1 = \sqrt{\lambda^2 - \kappa_1^2}$$
,  $\gamma_2 = \sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2}$ ,  $\kappa_k^2 = \frac{\omega^2}{c_k^2}$ ,  $k = 1, 2$ ,

 $\mathcal{C}_1$  ,  $\mathcal{C}_2\,$  - скорости распространения упругих волн в теле.

Формулы (9) выражают перемещения в матрице через скачки напряжений, для определения которых необходимо использовать условия (7). После подстановки представления (9) в граничные условия (7) получена система интегральных уравнений относительно неизвестных скачков. В результате преобразований, детально изложенных в [8], эта система приводится к виду:

$$AG(y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{BG(\zeta)}{\zeta - y} d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} Q(\zeta - y)G(\zeta)d\zeta + A_0G(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} Q(\zeta - y)G(\zeta)d\zeta + A_0G(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{BG(\zeta)}{\zeta - y} d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} Q(\zeta - y)G(\zeta)d\zeta + A_0G(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{BG(\zeta)}{\zeta - y} d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} Q(\zeta - y)G(\zeta)d\zeta + A_0G(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{BG(\zeta)}{\zeta - y} d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} Q(\zeta - y)G(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{BG(\zeta)}{\zeta - y} d\zeta + \frac{1}{2\pi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{B_{0}G(\zeta)}{\zeta}d\zeta + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}Q_{0}(\zeta)G(\zeta)d\zeta = d_{0}e_{2} + F(y), \qquad -1 < y < 1.$$
(10)

Для записи системы в виде (10) были введены следующие векторы и матрицы

$$G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}; \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\xi^2}{2} & 0 & 1-\xi^2 \\ -\frac{1+\xi^2}{4} & 0 & -\frac{\xi^2}{2} \\ 0 & -\frac{1+\xi^2}{4} & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_0 = \begin{pmatrix} \frac{\xi^2}{2} & 0 & -(1-\xi^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad Q = \begin{pmatrix} -Q_1 & 0 & -Q_2 \\ -Q_3 & 0 & -Q_1 \\ 0 & -Q_4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & Q_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad d_0 = \frac{d}{a}; \qquad \xi = \frac{c_2}{c_1}.$$

Новые неизвестные функции связаны с реальными скачками (6) формулами:  $g_1(\zeta) = (\mu a)^{-1} \varphi_1(a\zeta), \quad g_2(\Box) \stackrel{\rightarrow}{\Rightarrow} (\Box A)^{-1} \varphi_2(a\zeta), \quad g_3(\zeta) = a^{-1} \varphi_3(a\zeta).$   $\chi_k(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_r^a \varphi_k(\tau) \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \right) d\tau; \quad k = 1, 2 ,$  $\eta^{-1}(\eta \chi_4(\eta))' = \frac{2}{\pi} \int_r^a \varphi_3(\tau) \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\tau^2 - r^2} \right) d\tau .$  (11)

Кроме того, при выводе системы (10), функции  $\phi_1(\tau)$  и  $\phi_3(\tau)$  были четно, а  $\phi_2(\tau)$  нечетно продлены на [-*a*, *a*].

Функции  $Q_k(x)$ ,  $x = \zeta - y$ , k = 1,2,3 являются непрерывными и ограниченными при  $-1 \le \zeta$ ,  $y \le 1$ , и их непосредственный вид можно найти в [8] и [9], [18].

Larysa Vakhonina

Компоненты вектора правых частей системы (10) определяются в зависимости от типа волн взаимодействующих с включением. При распространении плоской продольной волны считается:

$$f_1(\zeta) = 0,$$
  $f_2(\zeta) = -i\alpha_0,$   $f_3(\zeta) = 0.$  (12)

Если распространяется цилиндрическая продольная волна, то они равны:

$$f_{1}(\zeta) = 2i\alpha_{0}b_{1}^{-1}d_{1}(1 - \cos\xi\kappa_{0}b_{1}\zeta), \quad f_{2}(\zeta) = -id_{1}b_{1}^{-1}\alpha_{0}\cos(\xi\kappa_{0}b_{1}\zeta),$$
  

$$f_{3}(\zeta) = -\alpha_{0}\sin(\xi\kappa_{0}b_{1}\zeta). \quad (13)$$

При действии цилиндрической волны сдвига правые части системы находятся по формулам:

$$f_{1}(\zeta) = \beta_{0} (2b_{2}^{2} - 1)b_{1}^{-2} (1 - \cos \kappa_{0}b_{2}\zeta), \quad f_{2}(\zeta) = -i\beta_{0} \cos \kappa_{0}b_{1}\zeta,$$

$$f_{3}(\zeta) = -i\beta_{0}d_{1}b_{2}^{-1} \sin(\xi\kappa_{0}b_{1}y).$$
B формулах (12) - (14) введены обозначения:
(14)

$$d_k = \kappa_2^{-1} \gamma; \quad b_k = \sqrt{1 - d_k^2}; \quad k = 1, 2; \quad \alpha = a^{-1} A_0; \quad \beta = a^{-1} B_0; \quad \kappa_0 = a \kappa_2.$$

С целью разделения сингулярной части системы (10) была построена обратная матрица  $A^{-1}$ (это всегда возможно, так как  $det(A) = -\frac{1+\xi^2}{16} \neq 0$ ). После этого введены новые неизвестные функции по формулам:

известные функции по формулам  $(P(\zeta))$ 

$$G(\zeta) = TP(\zeta); \quad P(\zeta) = \begin{pmatrix} P_1(\zeta) \\ P_2(\zeta) \\ P_3(\zeta) \end{pmatrix}.$$
(15)

Входящая в (15) матрица T, должна быть такой, чтобы выполнялось равенство  $T^{-1}GT = D$ ,  $C = A^{-1}B$ ,

где: *D* - некоторая диагональная матрица.

Такая матрица *T* легко может быть построена [10], и так как собственные числа матрицы *C* простые  $(\lambda_1 = 0; \lambda_2 = -\frac{1}{2}; \lambda_3 = \frac{1}{2})$  то диагональные элементы матрицы *D* таковы  $d_{11} = \lambda_1 = 0; d_{22} = \lambda_2 = -\frac{1}{2}; d_{33} = \lambda_3 = \frac{1}{2}$ . Далее обе части системы (10) были умножены

на  $A^{-1}$  слева, в неё было подставлено выражение (15), а полученное равенство умножено на  $T^{-1}$ . В результате система (10) приняла следующий вид:

$$P(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{DP(y)}{y - \zeta} dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} R(y - \zeta) P(y) dy + UP(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{D_0 P(y)}{y} dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} R_0(y) P(y) dy = d_0 V_0 + H(\zeta), \quad -1 < \xi < 1,$$
(16)  
rge:  $R = T^{-1} A^{-1} QT$ ;  $U = T^{-1} E_0 T$ ;  $D_0 U = T^{-1} C_0 T$ ;  $R_0 = T^{-1} A^{-1} Q_0 T$ ;  
 $V_0 = T^{-1} A^{-1} e_2$ ;  $H(\zeta) = T^{-1} A^{-1} F(\zeta).$ 

К системе (16) необходимо добавить уравнение, полученное из (8), которое после перехода к новым обозначениям по формулам (11), (15), имеет вид:

$$d_{0} = \frac{2\overline{\rho}}{\pi \varepsilon \kappa_{0}^{2}} \left( \int_{-1}^{1} (p_{1}(y) - 2\xi^{2} p_{2}(y) + 2\xi^{2} p_{3}(y)) dy \right).$$
(17)

166

### ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как показано в работах [1], [2] скачок напряжений вблизи кромки отслоившегося включения имеет степенную особенность с показателем  $-\frac{3}{4}$ . Поэтому решение системы

(16) следует искать в виде:  

$$P_k(y) = W_k(y) \psi_k(y), \quad k = 1, 2, 3,$$
(18)  
где:

 $W_1(y) \equiv 1; \quad W_2(y) = (1-y)^{\frac{1}{4}}(1+y)^{\frac{1}{4}}; \quad W_3(y) = (1-y)^{\frac{1}{4}}(1+y)^{-\frac{1}{4}}.$ 

Неизвестные функции  $\Psi_k(y)$  в (18) приближаются интерполяционными многочленами:

$$\Psi_{k}(y) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\Psi_{k}(y_{km}) P_{n}^{\alpha_{k}, -\alpha_{k}}(y)}{(y - y_{km}) [P_{n}^{\alpha_{k}, -\alpha_{k}}(y)]'}, \quad k = 1, 2, 3.$$
<sup>(19)</sup>

В последней формуле  $P_n^{\alpha_k}(y)$  - многочлены Якоби  $\left(\alpha_1 = 0; \alpha_2 = \frac{1}{4}; \alpha_3 = -\frac{1}{4}\right),$ ортогональные с соответствующим весом, а  $y_{km}$  – корни этих многочленов.

Сингулярную часть системы (16) составляют интегральные операторы: , 1 1 π (.

$$S_{1}[p_{1}](\zeta) = p_{1}(\zeta); \qquad S_{2}[p_{2}](\zeta) = p_{2}(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{p_{2}(y)}{y - \zeta} dy;$$
  
$$S_{3}[p_{3}](\zeta) = p_{3}(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{P_{3}(y)}{y - \zeta} dy.$$

Если функции  $\Psi_k(y)$  представить по формулам (18), (19), то для приближённых значений этих операторов справедливы формулы: ( )

$$S_{1}[p_{1}](y_{1j}\zeta) = \psi_{1}(y_{1j}); \ S_{2}[p_{2}](y_{3j}) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{n} A_{m}^{(2)} \frac{\psi_{2}(y_{2m})}{y_{2m} - y_{3j}};$$
  

$$S_{3}[p_{3}](y_{2j}) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{n} A_{m}^{(3)} \frac{\psi_{3}(y_{3m})}{y_{3m} - y_{2j}}; \ S_{k}[p_{k}](0) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{n} b_{m}^{(k)} \psi_{k}(y_{km}) \ (k = 1, 2, 3).$$
(20)

В последних формулах приняты обозначения:

$$A_{m}^{(2)} = \frac{-\sqrt{2}\pi P_{n}^{\frac{-1}{4},\frac{1}{4}}(y_{2m})}{\left[P_{n}^{\frac{-1}{4},\frac{1}{4}}(y_{2m})\right]}; \quad A_{m}^{(3)} = \frac{\pi\sqrt{2}P_{n}^{\frac{1}{4},\frac{-1}{4}}(y_{3m})}{\left[P_{n}^{\frac{-1}{4},\frac{1}{4}}(y_{3m})\right]}; \quad b_{m}^{(1)} = -\frac{\pi P(0)}{y_{1m}[P_{n}(y_{1m})]}; ;$$
$$b_{m}^{(2)} = \frac{\pi\sqrt{2}\left[P_{n}^{\frac{-1}{4},\frac{1}{4}}(y_{3m}) - P_{n}^{\frac{-1}{4},\frac{1}{4}}(0)\right]}{y_{2m}\left[P_{n}^{\frac{-1}{4},\frac{1}{4}}(y_{2m})\right]}; \quad b_{m}^{(3)} = \frac{\pi\sqrt{2}\left[P_{n}^{\frac{1}{4},\frac{-1}{4}}(y_{3m}) - P_{n}^{\frac{1}{4},\frac{-1}{4}}(0)\right]}{y_{2m}\left[P_{n}^{\frac{-1}{4},\frac{1}{4}}(y_{2m})\right]}.$$

С помощью формул (20), а так же квадратурных формул Гаусса-Якоби [13] (методом, изложенным в [11]), система (16) заменяется системой линейных алгебраических уравнений относительно значений неизвестных функций в узлах интерполяции  $\Psi_k(y_{lm})$ , k = 1, 2, 3, m = 1, ..., n.

$$\begin{split} \Psi_{1}(y_{lj}) + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{3} \sum_{m=1}^{n} A_{m}^{(l)}(y_{lm} - y_{1j}) \Psi_{l}(y_{lm}) &= V_{01}d_{0} + h_{1}(y_{1j}); \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{h=1}^{n} \Box_{2} \Phi y_{2m}) \frac{A_{m}^{(2)}}{y_{2m} - y_{3j}} + \frac{1}{2} \Box_{h=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} A_{m}^{(l)} \Box_{l} \Phi y_{lm}) \left( R_{2l}(y_{lm-}y_{3j}) + R_{2l}^{0}(y_{lm}) \right) + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{h=1}^{n} \left( \frac{\Box_{1}^{2} \check{E}}{4} b_{m}^{(1)} \Box_{l} \Phi y_{1m} \right) + \frac{1}{2} b_{m}^{(2)} \Box_{2} \Phi y_{2m} \right) + \frac{1}{2} b_{m}^{(3)} \Box_{3} \Phi y_{3m} \right) = V_{02}d_{0} + h_{2}(y_{3j}); \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{h=1}^{n} \Box_{3} \Phi y_{3m} \right) \frac{A_{m}^{(3)}}{y_{3m} - y_{2j}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{3} \sum_{m=1}^{n} A_{m}^{(l)} \Box_{l} \Phi y_{lm} \right) \left( R_{3l}(y_{lm-}y_{2j}) + R_{3l}^{0}(y_{2m}) \right) + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{h=1}^{n} \left( -\frac{\Box_{1}^{2} \check{E}}{4} b_{m}^{(1)} \Box_{l} \Phi y_{1m} \right) + \frac{1}{2} b_{m}^{(2)} \Box_{2} \Phi y_{2m} \right) - \frac{1}{2} b_{m}^{(3)} \Box_{3} \Phi y_{3m} \right) = -V_{03}d_{0} + h_{3}(y_{2j}), \\ j = 1, 2, ...n; \end{split}$$

$$\tag{21}$$

К системе (21) следует добавить равенство для определения амплитуды колебаний включения, полученное из (17):

$$d_{0} = -\frac{2\Box \check{D}_{0}^{n}}{\Box \hat{I}_{0}^{-2}} A_{m=1}^{(1)} \left( A_{m}^{(1)} \Box_{1} \check{O}_{1m} \right) - 2\Box^{2} \check{E}_{m}^{(2)} \Box_{2} \check{O}_{2m} \right) + 2\Box^{2} \check{E}_{m=1}^{n} A_{m}^{(3)} \Box_{3} \check{O}_{2m} y_{3m} \right) \right).$$
(22)

#### ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

Концентрация напряжений вблизи включения может быть оценена, как и в [2], [17] коэффициентами при особенности скачков напряжений:

$$N_{k} = \lim_{r \to a^{-0}} (a - r)^{\frac{3}{4}} \chi_{k}(r), \quad (k = 1, 2).$$
<sup>(23)</sup>

После подстановки в (23) представлений (11) для скачков напряжений, выполнен предельный переход с учётом (15), (18), (19). В результате найдено, что

$$N_1 = \mu a^{\frac{3}{4}} \xi^2 N_0, \quad N_2 = -\mu a^{\frac{3}{4}} N_0, \quad N_0 = \frac{\Psi_3(1)}{\pi}.$$
(24)

Таким образом, оба коэффициента пропорциональны одной и той же величине  $N_0$ , приближенное значение которых в соответствии с (19) равно:

$$N_{0} = \sum_{m=1}^{n} \Psi_{3}(y_{3m}) \frac{P_{n}^{-1/4} \Psi_{4}(1)}{(1 - y_{3m}) \left[ P_{n}^{-1/4} \Psi_{4}(y_{3m}) \right]^{\prime}}.$$
 (25)

Было проведено численное исследование зависимости абсолютных величин коэффициента  $N_0$  и  $d_0$  от безразмерного волнового числа при действии на включение различными волнами. При расчетах считалось  $\overline{\rho} = 1$ ,  $\nu = 0,25$ ,  $\varepsilon = 0,05$ ,  $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ . При решении системы (21) использовалось до 30 узлов интерполяции, что обеспечило

вычисление  $|N_0|$  по формуле (25) с погрешностью меньше 0,1% для всего диапазона изменения волнового числа.

Результаты расчетов показаны в виде графиков на рис.1 – рис.5.

Графики на рис.1 соответствуют взаимодействию с включением плоской продольной волны. В этом случае величина  $|N_0|$  имеет сильный максимум при  $\kappa_0 \approx 8,1$ , а

амплитуда колебаний включения от волнового числа практически не зависит.

На рис.2 и рис.3 приведены графики зависимости  $|N_0|$  и  $|d_0|$  от волнового числа при взаимодействии с включеним цилиндрической продольной волны. Каждая кривая соответствует указанному значению волновой постоянной  $d_1$ . Видно, что при возрастании этого параметра концентрация напряжений вблизи включения усиливается. На всех графиках наблюдается максимум  $|N_0|$  при том же значении волнового числа  $\kappa_0 \approx 8,1$ . Амплитуда колебаний включения так же возрастает при приближении волновой постоянной  $d_1$  к 1. При возрастании волнового числа  $\kappa_0 \approx 8,1$ .

Результаты расчетов  $|N_0|$  и  $|d_0|$  при действии на включение цилиндрической волны сдвига можно видеть на рис.4 и рис.5. Каждая кривая построена при указанном значении волновой постоянной  $d_2$ . При действии такой волны поведение  $|N_0|$  и  $|d_0|$  аналогично предыдущему случаю.

#### выводы

Таким образом, численно установлено существование частоты, падающей волны при которой имеет место многократное усиление концентрации напряжений вблизи отслоившегося жесткого включения.



**Рис. 1**. Плоская продольная волна **Fig. 1**. Plane longitudinal wave



Рис. 2. Цилиндрическая продольная волна





**Рис. 4.** Цилиндрическая волна сдвига **Fig. 4.** Cylindrical shift wave





Fig. 3. Cylindrical longitudinal wave



**Рис. 5.** Цилиндрическая волна сдвига **Fig. 5.** Cylindrical shift wave

#### ЛИТЕРАТУРА

- Попов Г.Я.: Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, плоских включений и подкреплений. М.:Наука, 1982. 342 с.
- .Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболь Б.В.: Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М. :Наука, 1993. 224 с.
- Попов В.Г.: Исследование полей перемещений и напряжений при дифракции волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении. // Известия РАН МТТ, 1992. №3. с. 139-146.
- Попов В.Г.: Дифракция плоских упругих волн на отслоившемся жестком включении в случае гладкого контакта в области отслоения. ПММ т.625, вып.2, 1998. с. 290-296.
- Вахонина Л.В., Попов В.Г.: Концентрация напряжений вблизи кругового тонкого абсолютно жесткого отслоившегося включения при взаимодействии с ним волны кручения. //Известия РАН. МТТ. №4. 2004. с.70-76.
- Гринченко В.Т., Мелешко В.В.: Гармонические колебания и волны в упругих телах. К., 1981. 284с.
- Попов Г.Я.: Построение разрывных решений дифференциальных уравнений теории упругости для слоистой среды с межфазными дефектами // Доклады РАН. 1999. т.364. №6. с. 759-763.

- Вахонина Л.В., Попов В.Г.. Взаимодействие упругих волн с тонким жестким круговым включением в случае гладкого контакта.// Теоретическая и прикладная механика. 2003, вып.38, с.158-166.
- Вахонина Л.В., Попов В.Г.: Крутильные колебания пространства с тонким жестким круговым включением // Теория и практика процессов измельчения, разделения, смешения и уплотнения. Сб. научн. тр. Одесса 2000. Вып. 8. с. 31-38.
- *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.*: Численне методы в сингулярных интегральных уравнениях. //М.: Наука, 1985. 253с.
- Крылов В.И.: Приближенное вычисление интегралов. //М.: Наука, 1967. 500с.
- Перцев А.К., Платонов Э.Г.: Динамика оболочек и пластин. Л.: Судостроение. 1987. С. 316. Назарчук З.Т.: Численное исследование дифракции волн на цилиндрических
  - *структурах.* // К.: Наукова думка, 1989, С. 256.
- Кит Г.С., Михаськие В.В., Хай О.М.: Анализ установившихся колебаний плоского абсолютно жесткого включения в трехмерном упругом теле методом граничных элементов // Прикл. математика и механика. 2002.– Т. 66, вып. 5. С. 855–863.
- *Михаськів В.В., Хай О.М.:* До теорії міцності пружних тіл з плоскими жорсткими включеннями в полі усталених динамічних навантажень. // Машинознавство 1993 №3 С. 17-22.
- Михаськів В.В., Калиняк О.І.: Нестаціонарні збурення тривимірної пружної матриці з жорстким дисковим включенням // Фізико–хімічна механіка матеріалів. – 2005.– Т. 41, № 2. – С. 7–15.
- Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т.: Упругие напряжения в плоскости с тонкостенными включениями // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1975 -вып. 1. –С. 41 -48.
  - *Кеч В., Теодореску П.*: Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике.- М., 1978.- 520с.

# The research of the stress concentration under the interaction of harmonic waves with the thin disc-shaped rigid delaminated inclusion.

**Summury.** The stress concentration near the rigid disc-shaped delaminated inclusion, which is in the unbounded elastic body (matrix), has been considered. The method of solution is based on the presentation of the displacements in the matrix through the discontinuous solutions of the Lame equations for harmonic oscillations. It allowed to reduce the initial problem to the system of singular integral equations concerning the functions connected with jumps of stresses and displacements on the inclusion. The solution of the system is approximately built by the collocation method. The obtained approximate solution made it possible to do the numerical research on the stress in the matrix near the inclusion.

**Key words**: thin disc-shaped inclusion, harmonic waves, singular integral equation, stress intensity factor.

Reviewer: Boris Butakov, Prof. Sc. D. Eng.